TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 10: Krummlinige Koordinaten

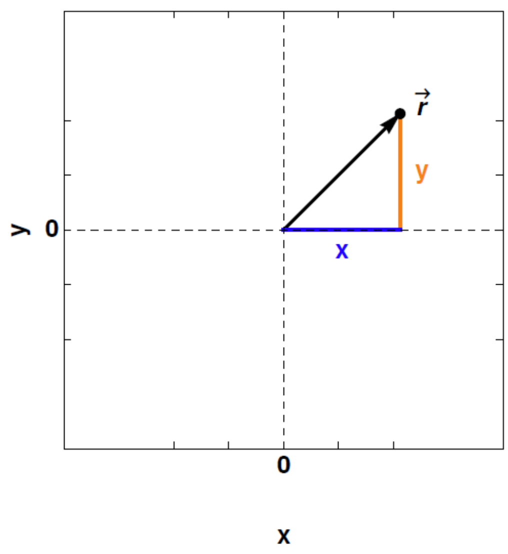
Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

Januar 11, 2021

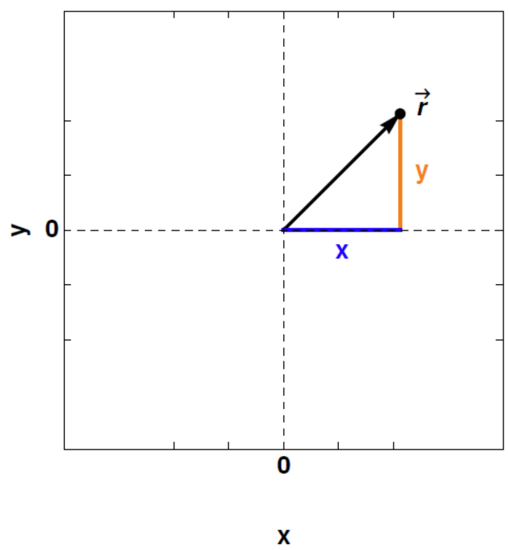
§ 6. Krummlinige Koordinaten

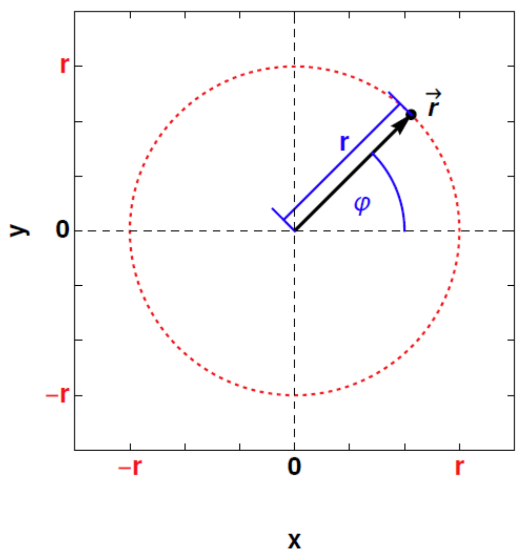
2D: kartesische Koordinaten (x- und y-Koordinaten)



§ 6.1 Polarkoordinaten

2D: kartesische Koordinaten (x- und y-Koordinaten)

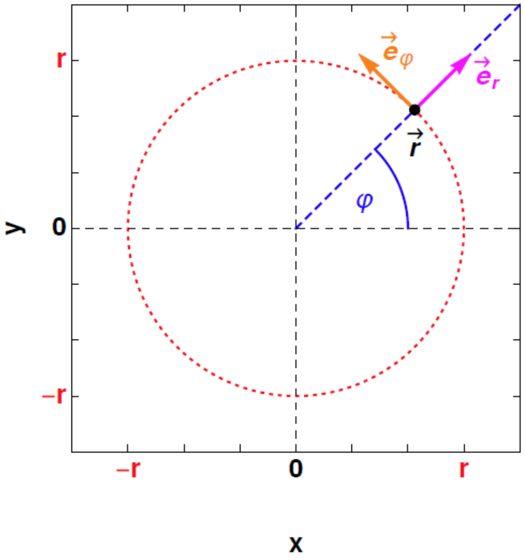




Alternative Möglichkeit: Angabe von Radius r und Winkel φ (Polarkoordinaten)

§ 6.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten in 2D:



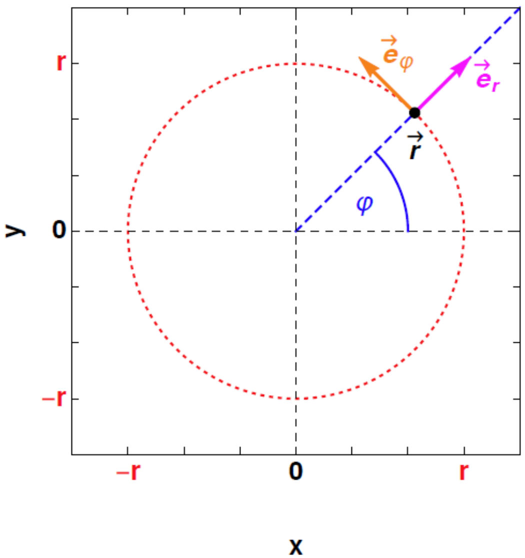
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad r \in [0, \infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

§ 6.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten in 2D:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

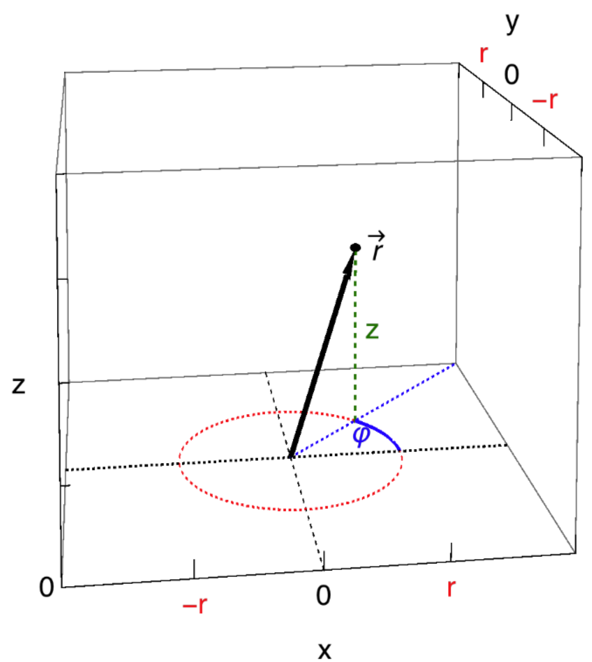
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad r \in [0, \infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

Einheitsvektoren: $\vec{e}_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

§ 6.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten: 3D Verallgemeinerung von Polarkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\,\cos(\varphi) \\ \rho\,\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

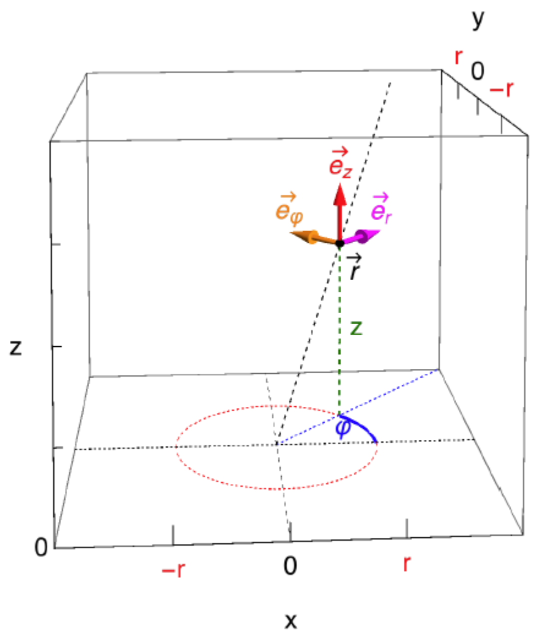
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \rho \in [0, \infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$z \in]-\infty, \infty[$$

§ 6.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten: 3D Verallgemeinerung von Polarkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

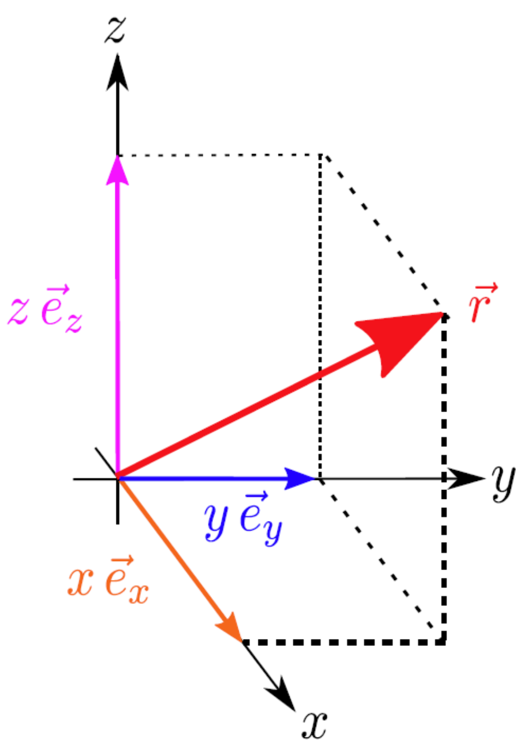
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \rho \in [0,\infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$z \in]-\infty, \infty[$$

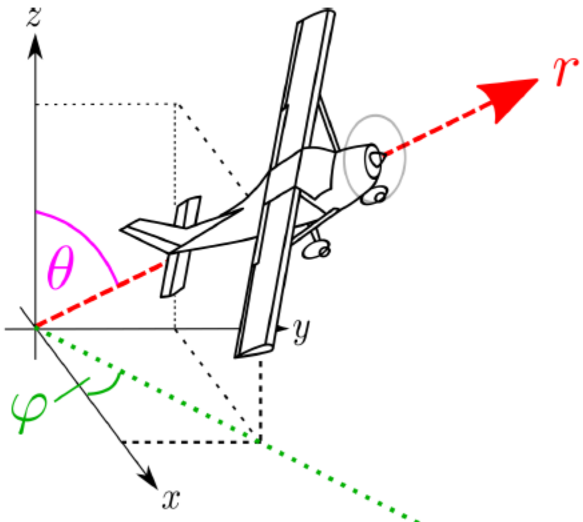
Einheitsvektoren: $\vec{e}_\rho(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_\varphi(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{e}_z(\rho,\varphi,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

§ 6.3 Kugelkoordinaten



kartesische Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

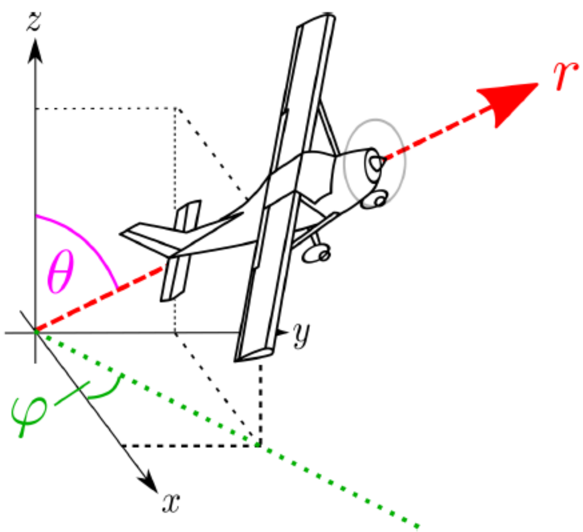
§ 6.3 Kugelkoordinaten



kartesische Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Kugelkoordinaten: Angabe von (r, θ, φ)

§ 6.3 Kugelkoordinaten



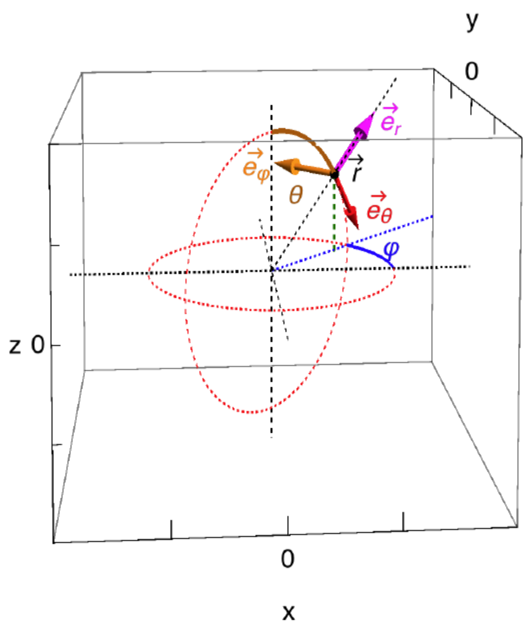
kartesische Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Kugelkoordinaten: Angabe von (r, θ, φ)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \sin(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

§ 6.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten: Einheitsvektoren



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

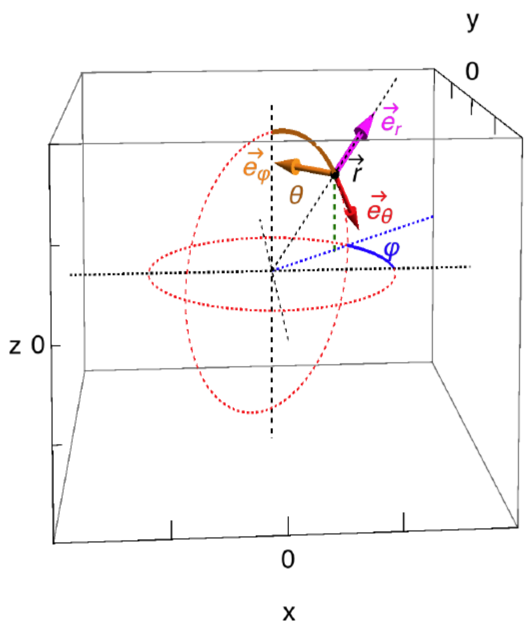
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad r \in [0, \infty[$$

$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

§ 6.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten: Einheitsvektoren



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad r \in [0, \infty[$$

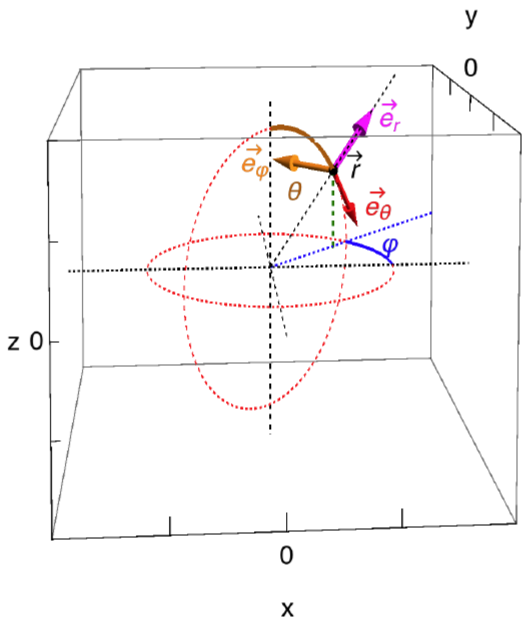
$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

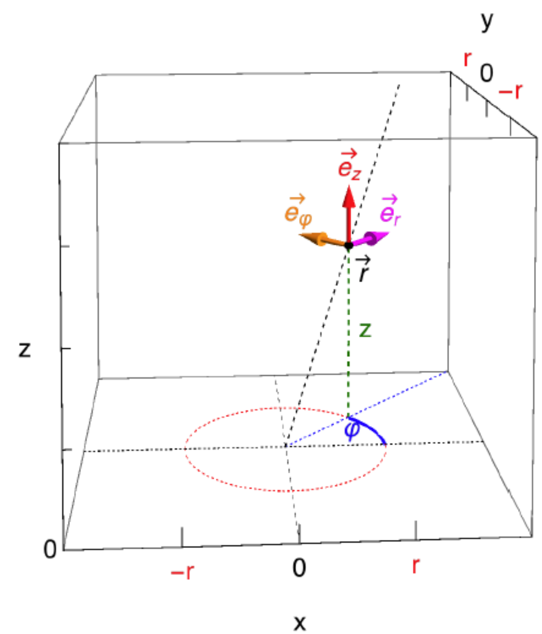
$$\vec{e}_r(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

§ 6.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten



Zylinderkoordinaten



Q: Was ist welches Koordinatensystem praktischer?

A: Es hängt vom Problem ab. Wenn Problem eher kugelsymmetrisch ist, sind Kugelkoordinaten einfacher.

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Erinnerung: Variablensubstitution bei Integralen

$$x \quad \rightarrow \quad u = g^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Erinnerung: Variablensubstitution bei Integralen

$$x \quad \rightarrow \quad u = g^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Wie geht das beim Wechsel

… von kartesischen Koordinaten in 2D zu Polarkoordinaten?

… von kartesischen Koordinaten in 3D zu Zylinderkoordinaten?

… von kartesischen Koordinaten in 3D zu Kugelkoordinaten?

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

- Transformationssatz in 3 Schritten:
  - Schritt 1: drücke alte Variablen als Funktion der neuen Variablen aus

$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

- Transformationssatz in 3 Schritten:
  - Schritt 1: drücke alte Variablen als Funktion der neuen Variablen aus

$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

  - Schritt 2: Berechne die „Jacobi-Matrix“ (Matrix der ersten partiellen Ableitungen)

$$\mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u})\big|_{ij} = \frac{\partial x_i(\vec{u})}{\partial u_j} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\vec{u})}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_1(\vec{u})}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2(\vec{u})}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_2(\vec{u})}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n(\vec{u})}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_n(\vec{u})}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

- Transformationssatz in 3 Schritten:
  - Schritt 1: drücke alte Variablen als Funktion der neuen Variablen aus

$$x_i = x_i(u_1, \ldots, u_n) \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

  - Schritt 2: Berechne die „Jacobi-Matrix“ (Matrix der ersten partiellen Ableitungen)

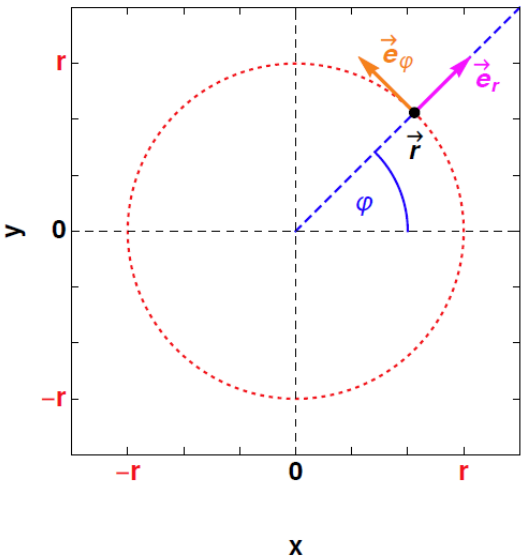
$$\mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u})\big|_{ij} = \frac{\partial x_i(\vec{u})}{\partial u_j} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\vec{u})}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_1(\vec{u})}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2(\vec{u})}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_2(\vec{u})}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n(\vec{u})}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_n(\vec{u})}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

  - Schritt 3: Verändere das Integral wie folgt:

$$\int d^n x \, f(x_1, \ldots, x_n) = \int d^n u \, \left|\mathrm{Det}\left\{\mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u})\right\}\right| \, f(x_1(\vec{u}), \ldots, x_n(\vec{u}))$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

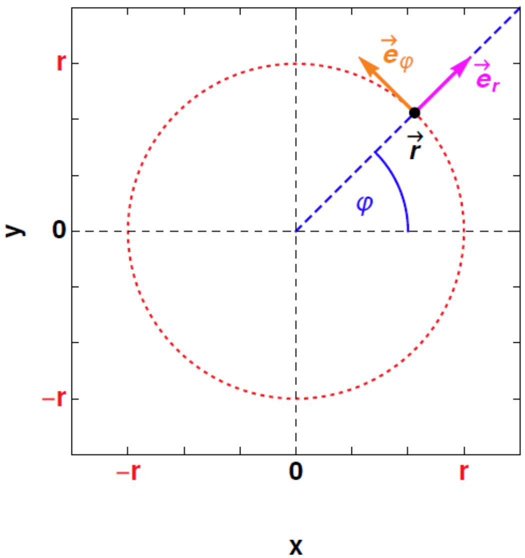
Beispiel 1: von kartesischen Koordinaten in 2D zu Polarkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Beispiel 1: von kartesischen Koordinaten in 2D zu Polarkoordinaten

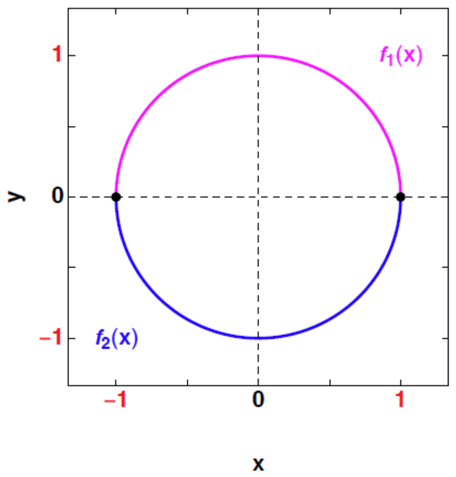


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$dx\, dy \rightarrow r\, dr\, d\varphi$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

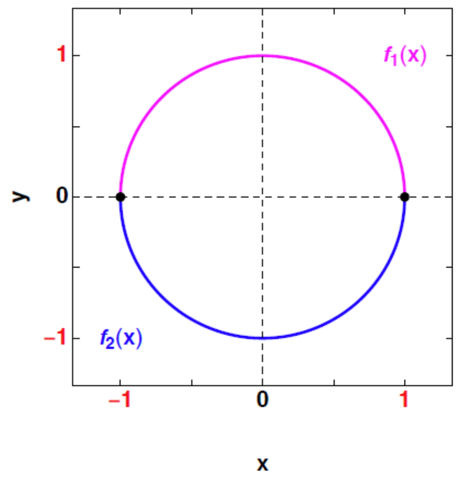
Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; = ?$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$

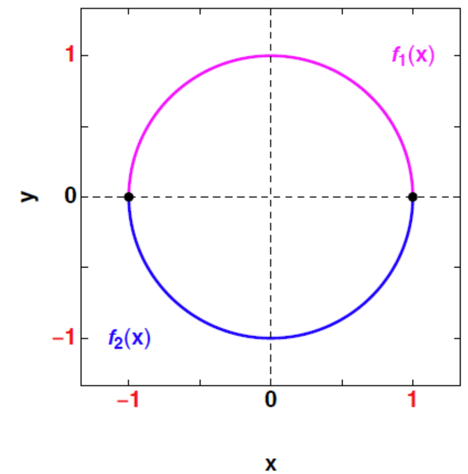


$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;= ?$$

Kartesische Koordinaten?

§ 5.5 Mehrfachintegrale

Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; = ?$$

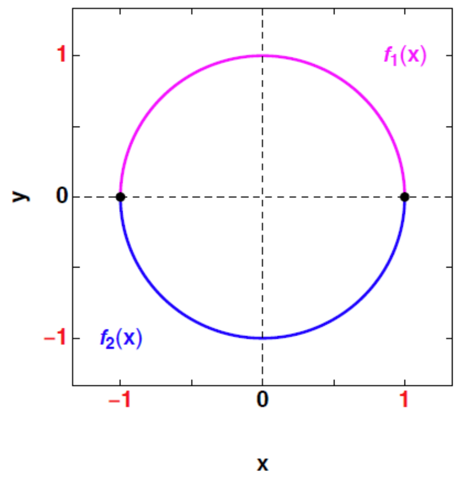
Kartesische Koordinaten?

$$\int dA = \int_{-1}^{1} dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy = \int_{-1}^{1} dx \, (f_1(x) - f_2(x)) = \int_{-1}^{1} dx \, \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2})\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \, 2\sqrt{1-x^2} = 2\int_{0}^{1} dx \, 2\sqrt{1-x^2} = 4\int_{0}^{1} dx \, \sqrt{1-x^2} = 4\,\frac{\pi}{4} = \pi = \pi\, 1^2$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;= ?$$

Polarkoordinaten?

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Gaußsches Integral: $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} = ?$$

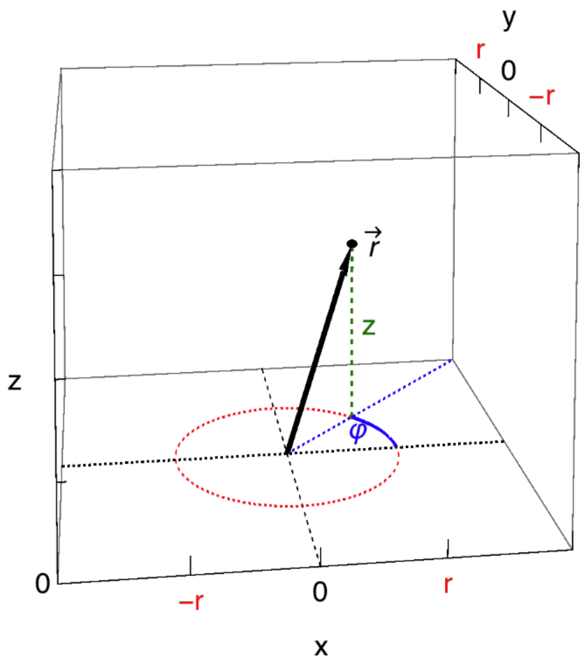
§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Gaußsches Integral: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \; e^{-x^2} = ?$

$$\Rightarrow \quad I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \; e^{-(x^2+y^2)} = ?$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

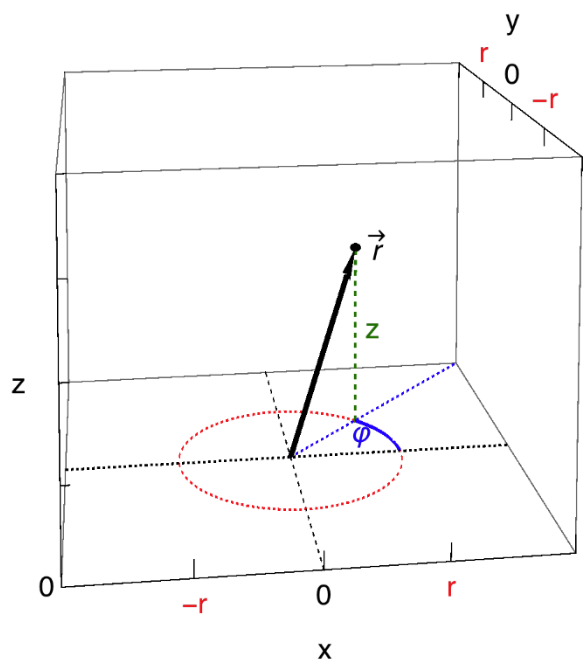
Beispiel 2: von kartesischen Koordinaten in 3D zu Zylinderkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\,\cos(\varphi) \\ \rho\,\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Beispiel 2: von kartesischen Koordinaten in 3D zu Zylinderkoordinaten

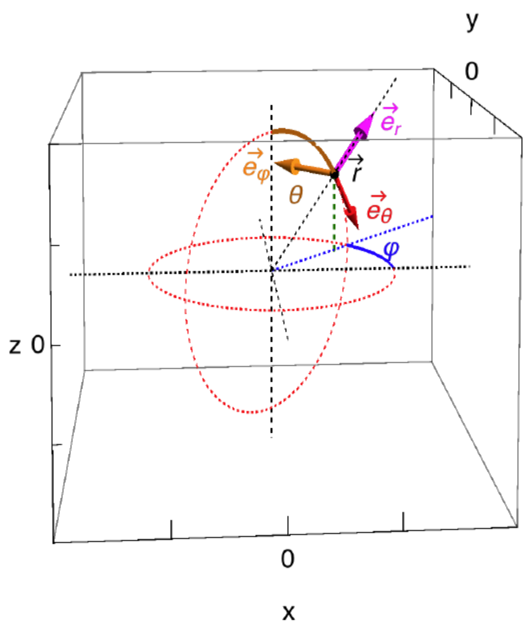


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\,\cos(\varphi) \\ \rho\,\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$dx\,dy\,dz \rightarrow \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

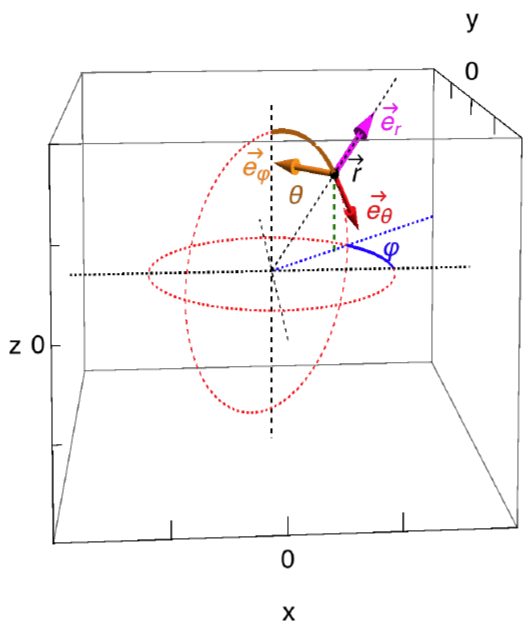
Beispiel 3: von kartesischen Koordinaten in 3D zu Kugelkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \sin(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Beispiel 3: von kartesischen Koordinaten in 3D zu Kugelkoordinaten



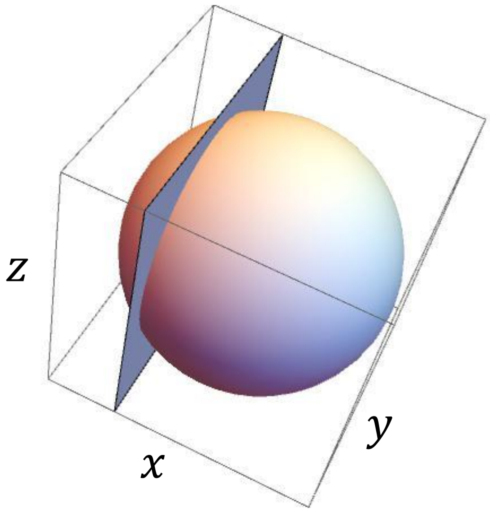
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$dx\,dy\,dz \rightarrow r^2\,\sin(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

§ 6.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Einheitskugel, definiert über $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$V = \iiint_{\text{Einheitskugel}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$$



Kugelkoordinaten?