SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 12: Integralsätze und Differentialgleichung

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

Januar 25, 2021

§ 7. Vektoranalysis und Integralsätze von Gauß und Stokes

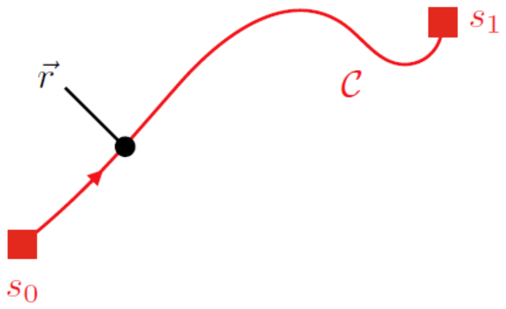
Letze Vorlesung:

- Gradient, Divergenz und Rotation
- Rechentricks mit dem ∇-Operator
- Linienintegral: Definition und Berechnung

§ 7.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

- Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r},t)$:

„Integral des Feldes entlang einer Linie“



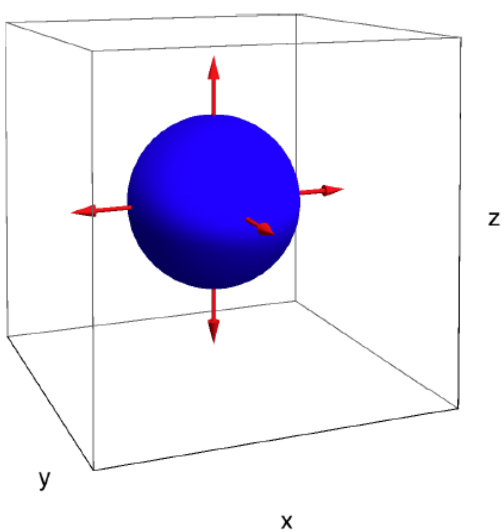
- Oberflächenintegral eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r},t)$:

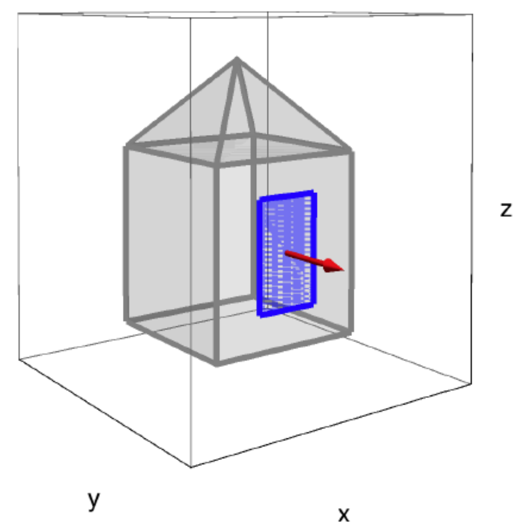
„Integral des Feldes über eine Fläche“

§ 7.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Wichtiger Baustein für Oberflächenintegral: Orientierung der Fläche

Orientierung einer Fläche: festlegen, was „außen“ ist



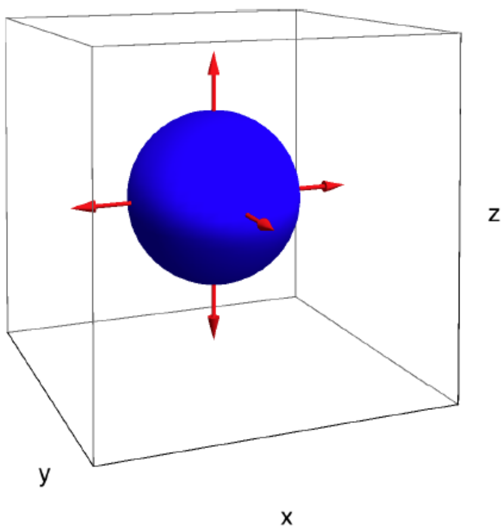


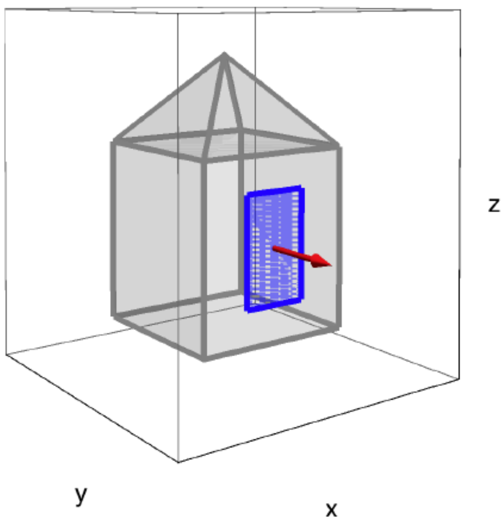
§ 7.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Wichtiger Baustein für Oberflächenintegral: Orientierung der Fläche

Orientierung einer Fläche: festlegen, was „außen“ ist

Flächennormalenvektor: Einheitsvektor, $\vec{n}$ der nach außen zeigt





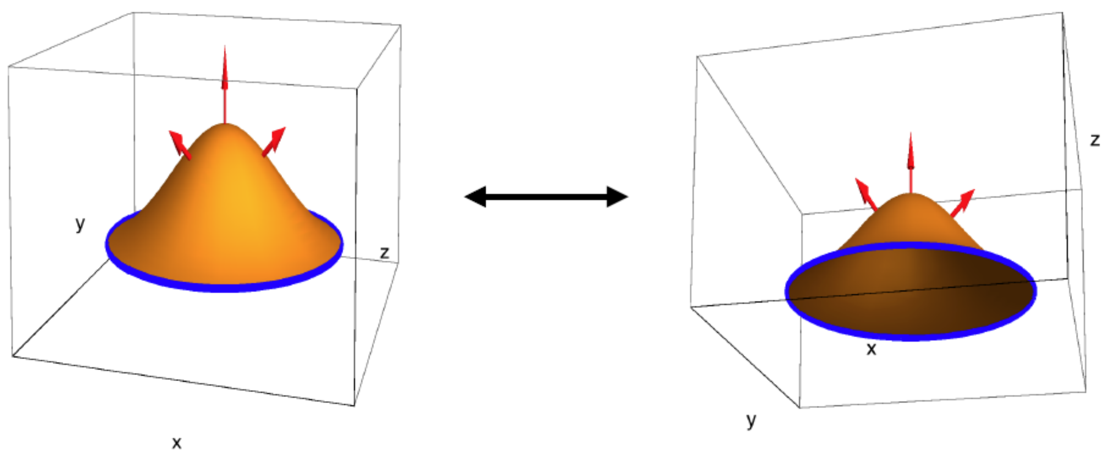
§ 7.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

Wichtiger Baustein für Oberflächenintegral: Orientierung der Fläche

Orientierung einer Fläche: festlegen, was „außen“ ist

Flächennormalenvektor: Einheitsvektor, $\vec{n}$ der nach außen zeigt

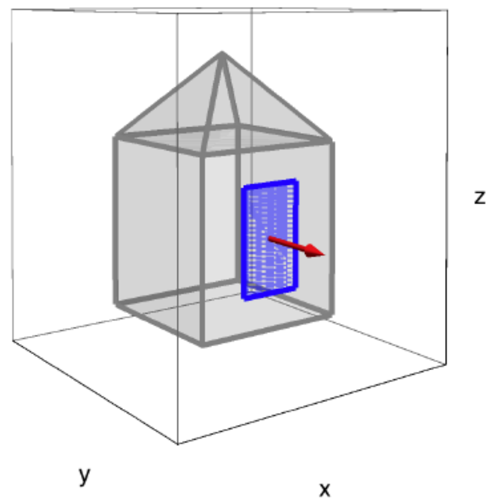
Achtung: nicht eindeutig (nach oben oder nach unten?) - freie Wahl!



§ 7.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

- Das Oberflächenintegral:

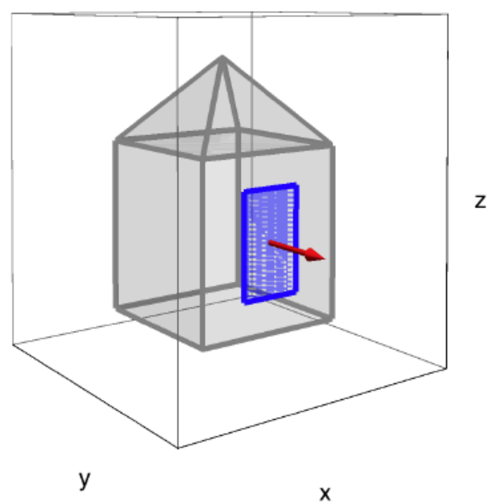
$$\int d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$



§ 7.3 Oberflächenintegral eines Vektorfeldes

- Das Oberflächenintegral:

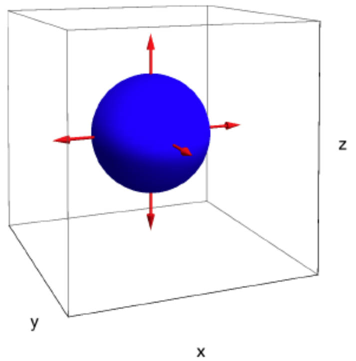
$$\int d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$



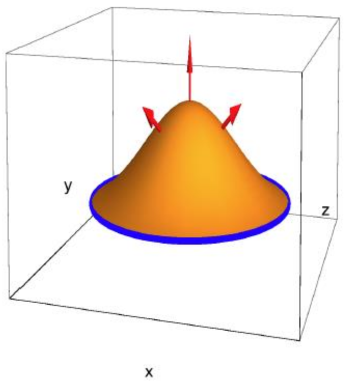
Berechnung: über verschachtelte „normale" Integrale und Stammfunktionen

§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- Oberflächen und ihr Rand:
  - geschlossene Oberfläche: hat keinen Rand



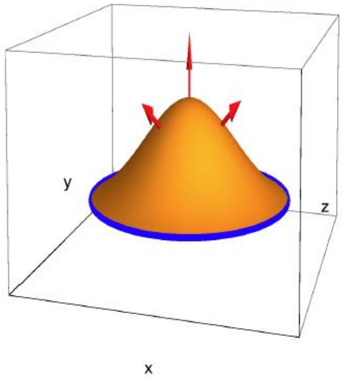
  - nicht-geschlossene Oberfläche: hat Rand



§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- Oberflächen und ihr Rand:
  - ➢ nicht-geschlossene Oberfläche: hat Rand

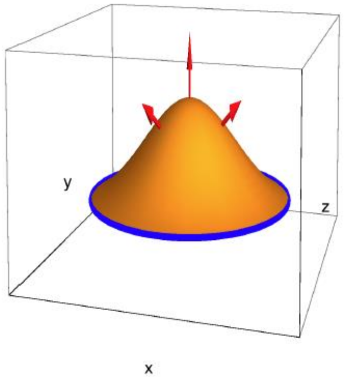
Oberfläche S ⇒ Rand ∂S



§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

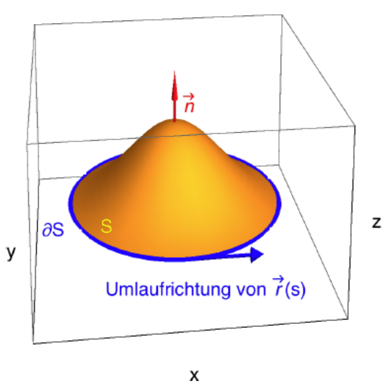
- Oberflächen und ihr Rand:
  - nicht-geschlossene Oberfläche: hat Rand

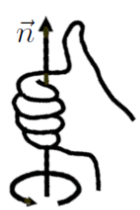
Oberfläche S $\Rightarrow$ Rand ∂S

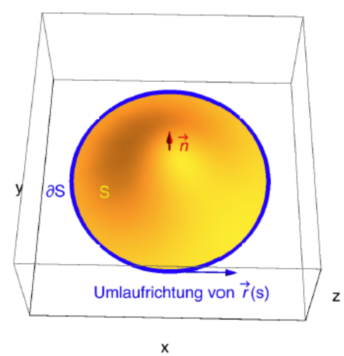


Umlaufrichtung für Pfad entlang des Randes: rechte Hand-Regel

von oben schauend gegen Uhrzeigersinn = „mathematisch positiv“



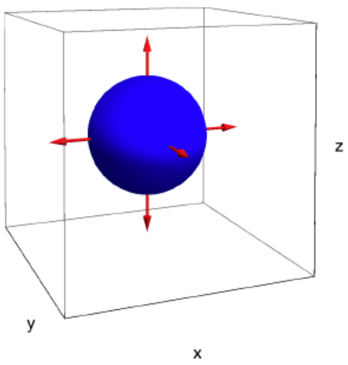




§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- Satz von Gauß: verbindet Volumenintegral und Oberflächenintegral

$$\int_V dV\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$



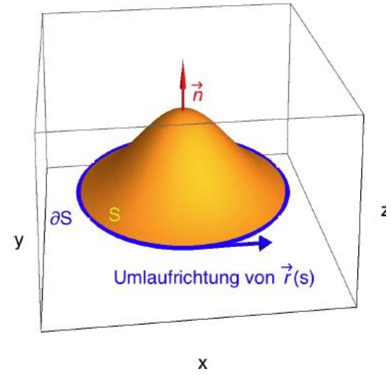
§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- Satz von Gauß: verbindet Volumenintegral und Oberflächenintegral

$$\int_V dV\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$

- Satz von Stokes: verbindet Oberflächenintegral und Linienintegral

$$\int_S d\vec{S} \cdot \left[\nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)\right] = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$



§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- Satz von Gauß: verbindet Volumenintegral und Oberflächenintegral

$$\int_V dV\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$

- Satz von Stokes: verbindet Oberflächenintegral und Linienintegral

$$\int_S d\vec{S} \cdot \left[\nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)\right] = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$

Wichtige Hilfsmittel in der Physik (z.B. Elektrodynamik)!

§ 8. Differentialgleichung

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] f(x) \arrow[r, bend right, "\text{Ableitung}"'] & \dfrac{df(x)}{dx} \arrow[l, bend right, "\text{Integration}"'] \end{tikzcd}$$

$$f(x) = e^{5x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 5\ \underbrace{e^{5x}}_{=f(x)} = 5\, f(x)$$

§ 8. Differentialgleichung

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] f(x) \arrow[r, bend right, "\text{Ableitung}"'] & \dfrac{df(x)}{dx} \arrow[l, bend right, "\text{Integration}"'] \end{tikzcd}$$

$$f(x) = e^{5x} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\frac{df(x)}{dx}} = f'(x) = 5 \underbrace{e^{5x}}_{=f(x)} = \underline{5\, f(x)}$$

- Differentialgleichung (DGL): Gleichung für gesuchte Funktion, in der auch Ableitungen der Funktion vorkommen

§ 8. Differentialgleichung

Beispiele:

$$f'(x) = 5\,f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = -f(x)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 7$$

§ 8. Differentialgleichung

Beispiele:

$$f'(x) = 5\,f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = -f(x)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 7$$

$$f(x) = -38323$$

$$f(x) = -\frac{\ln\left(\pi^{0.373}\right)}{18.3}$$

Ohne extra-Infos („Randbedingungen“): DGLs haben keine eindeutige Lösung!

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Gewöhnliche vs. partielle DGL:

  - gewöhnliche DGL: Funktion hängt nur von einer Variablen ab

$$f'(x) + 449.9\, f(x)^5 + \cos(x) = 7$$

  - partielle DGL: Funktion hängt von mehreren Variablen ab
    DGL enthält verschiedene partielle Ableitungen

$$\frac{\partial \rho(\vec{r},t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 \rho(\vec{r},t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho(\vec{r},t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho(\vec{r},t)}{\partial z^2}\right)$$

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Ordnung einer DGL: Grad der höchsten Ableitung

$$\frac{df(x)}{dx} = 5\,f(x)$$

DGL 1. Ordnung

$$\frac{df(x)}{dx} = 5\,f(x) + \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

DGL 4. Ordnung

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Homogene vs. inhomogene DGL:

  - homogene DGL: alle Terme der DGL enthalten die Funktion oder ihre Ableitungen

$$f'(x) = 5\,f(x)$$

  - inhomogene DGL: es gibt Terme, die nicht die Funktion enthalten

$$f'(x) = 5\,f(x) + \underline{x^3}$$

Ableitung der Funktion Funktion weder noch

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Allgemeine lineare DGL:

  - Lineare DGL: Funktion und Ableitung kommt nur in 1. Potenz vor

    Beispiel: $f'(x) = 5\, f(x)$

    Gegenbeispiel: $f'(x) + 449.9\, \underline{f(x)^5} + \cos(x) = 7$

  - Allgemeine lineare DGL n-ter Ordnung:

$$a_n(x)\, \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\, \frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\, f(x) = b(x)$$

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Allgemeine lineare DGL:

  - Lineare DGL: Funktion und Ableitung kommt nur in 1. Potenz vor

    Beispiel: $f'(x) = 5\, f(x)$

    Gegenbeispiel: $f'(x) + 449.9\, \underline{f(x)^5} + \cos(x) = 7$

  - Allgemeine lineare DGL n-ter Ordnung:

$$a_n(x)\, \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\, \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\, \frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\, f(x) = \underline{b(x)}$$

$b(x) = 0$ homogene

$b(x) \neq 0$ inhomogene

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

Beispiele:

$f(x) = -89$: gewöhnliche inhomogene DGL 0. Ordnung

$f'(x) - 38f'''(x) = f''(x)$: gewöhnliche homogene DGL 3. Ordnung

$\frac{df(x,y)}{dx} + \frac{df(x,y)}{dy} = -f(x,y) + 7$: partielle inhomogene DGL 1. Ordnung

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

$$f'(x) = 5\,f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = -f(x)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 7$$

$$f(x) = -38323$$

$$f(x) = -\frac{\ln\left(\pi^{0.373}\right)}{18.3}$$

Ohne extra-Infos („Randbedingungen“): DGLs haben keine eindeutige Lösung!

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

$$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 + c$$

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

$$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \underline{c}$$

Allgemeine Lösung: Alle Konstanten sind erlaubt.

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

$$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \underline{c}$$

Allgemeine Lösung: Alle Konstanten sind erlaubt.

Die Lösung ist eindeutig, wenn wir eine sogenannte „Randbedingung“ festlegen, z.B. $f(0) = 1$.

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

- Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung braucht n Randbedingungen, damit die Lösung eindeutig festgelegt werden kann.

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

unabhängige Lösungen: $f_1(x), \ldots, f_n(x)$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg.}} = c_1\,f_1(x) + \ldots + c_n\,f_n(x)$$

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

- Eine gewöhnliche DGL n-ter Ordnung braucht n Randbedingungen, damit die Lösung eindeutig festgelegt werden kann.

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

unabhängige Lösungen: $f_1(x), \ldots, f_n(x)$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg.}} = \underline{c_1}\, f_1(x) + \ldots + \underline{c_n}\, f_n(x)$$

durch Randbedingungen festgelegt, z.B. $f(x_1), \ldots, f(x_n)$

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

Beispiel: $f''(x) = -f(x)$

$f(0) = 0$ und $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ (Randbedingungen)

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
  - Raten: Die DGLs in der Physik sehen oft ähnlich aus.

$$f'(x) = \alpha\, f(x) \text{ (mit } \alpha \in \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad f(x) = c_0\, e^{\alpha\, x}$$

$$f''(x) = -\alpha\, f(x) \text{ (mit } \alpha > 0) \quad \Rightarrow \quad f(x) = c_1\, \sin(\sqrt{\alpha}\, x) + c_2\, \cos(\sqrt{\alpha}\, x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Lösung durch Integration:

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} = g(x)$$