TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 13: Differentialgleichung

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

Februar 1, 2021

§ 8. Differentialgleichung

Letze Vorlesung:

- Grundbegriffe von Differentialgleichungen
- Rolle von Randbedingungen
- Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
  - Trennung der Variablen:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x)\,h(f(x))$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f'(x) = x^2 f(x)$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Exponentialansatz:

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Exponentialansatz:

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x}$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
  - Exponentialansatz:

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \quad \underline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

n Lösungen für λ!

$$\Rightarrow \quad f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x}$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Exponentialansatz:

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x}$

$$\Rightarrow \quad \underline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

n Lösungen für λ!

Vorsicht bei Entartungen (z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$)!

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
  - Inhomogene Differentialgleichungen:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene Differentialgleichungen:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = \underline{b(x)}$$

Löse zunächst die entsprechende homogene DGL!

$$a_n(x)\,\frac{d^n f_{\text{allg. hom.}}(x)}{dx^n} + \ldots + a_0(x)\,f_{\text{allg. hom.}}(x) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg. hom.}} = c_{1,\text{hom.}}\,f_{1,\text{hom.}}(x) + \ldots + c_{n,\text{hom.}}\,f_{n,\text{hom.}}(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene Differentialgleichungen:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = \underline{b(x)}$$

Löse zunächst die entsprechende homogene DGL!

$$a_n(x)\,\frac{d^n f_{\text{allg. hom.}}(x)}{dx^n} + \ldots + a_0(x)\,f_{\text{allg. hom.}}(x) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg. hom.}} = c_{1,\text{hom.}}\,f_{1,\text{hom.}}(x) + \ldots + c_{n,\text{hom.}}\,f_{n,\text{hom.}}(x)$$

Finde/Rate eine spezielle Lösung $f_{\text{spez.}}(x)$ der inhomogenen DGL!

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  ➢ Inhomogene Differentialgleichungen:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = \underline{b(x)}$$

Löse zunächst die entsprechende homogene DGL!

$$a_n(x)\,\frac{d^n f_{\text{allg. hom.}}(x)}{dx^n} + \ldots + a_0(x)\,f_{\text{allg. hom.}}(x) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg. hom.}} = c_{1,\text{hom.}}\,f_{1,\text{hom.}}(x) + \ldots + c_{n,\text{hom.}}\,f_{n,\text{hom.}}(x)$$

Finde/Rate eine spezielle Lösung $f_{\text{spez.}}(x)$ der inhomogenen DGL!

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg. inhom.}}(x) = f_{\text{allg. hom.}}(x) + f_{\text{spez.}}(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f'(x) - f(x) = e^{2x}$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene lineare Differentialgleichungen: Variation der Konstanten

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene lineare Differentialgleichungen: Variation der Konstanten

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

Löse zuerst die homogene DGL:

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\,f_1(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene lineare Differentialgleichungen: Variation der Konstanten

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

Löse zuerst die homogene DGL:

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\,f_1(x)$$

Ersetze die Konstante c_1 durch eine Funktion $c_1(x)$.

Verwende den Ansatz $c_1(x)f_1(x)$ für die inhomogene DGL und bestimmen $c_1(x)$.

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f'(x) - f(x) = e^{2x}$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Reduktion der Ordnung:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_m(x)\,\frac{d^m f(x)}{dx^m} = b(x) \qquad (n > m)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Reduktion der Ordnung:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_m(x)\,\frac{d^m f(x)}{dx^m} = b(x) \qquad (n > m)$$

Substitution: $g(x) = \frac{d^m f(x)}{dx^m}$

$$\Rightarrow \quad a_n(x)\,\frac{d^{n-m} g(x)}{dx^{n-m}} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-m-1} g(x)}{dx^{n-m-1}} + \ldots + a_m(x)\,g(x) = b(x)$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underline{A}\,\vec{y}(x)$$

$(n \times n)$-Matrix

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underline{A}\,\vec{y}(x)$$

$(n \times n)$-Matrix

Beispiel: $\frac{df(x)}{dx} = h(x)$ $\quad \frac{dh(x)}{dx} = g(x)$ $\quad \frac{dg(x)}{dx} = 2\,f(x) - g(x)$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underline{A}\,\vec{y}(x)$$

$(n \times n)$-Matrix

Beispiel: $\frac{df(x)}{dx} = h(x) \qquad \frac{dh(x)}{dx} = g(x) \qquad \frac{dg(x)}{dx} = 2\,f(x) - g(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f(x) \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underbrace{A}_{(n \times n)\text{-Matrix}}\,\vec{y}(x)$$

Wie löst man diese gekoppelte Differentialgleichungen?

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underline{A}\,\vec{y}(x)$$

$(n \times n)$-Matrix

Bestimme die Eigenwerte α_i und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{a}_i$ von A:

$$A\,\vec{a}_i = \alpha_i\,\vec{a}_i$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underbrace{A}_{(n \times n)\text{-Matrix}}\, \vec{y}(x)$$

Bestimme die Eigenwerte α_i und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{a}_i$ von A:

$$A\,\vec{a}_i = \alpha_i\,\vec{a}_i$$

Allgemeine Lösung: $$\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}_{\text{Konstanten}}\, e^{\alpha_i x} \vec{a}_i$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underset{(n \times n)\text{-Matrix}}{\underline{A}}\,\vec{y}(x) \qquad\qquad A\,\vec{a}_i = \alpha_i\,\vec{a}_i$$

Beweis mit Ähnlichkeitstransformation von A:

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad\qquad S = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

Beispiel:

$$f'(x) = 2f(x) + g(x)$$
$$g'(x) = f(x) + 2g(x)$$

§ 9. Komplexe Zahlen

Bitte lernen Sie selbst:

- Definition und Rechenregeln der Komplexe Zahlen
- Komplexe Funktionen
- Grundlagen der Fourier-Transformation

Sie sind sehr wichtig für Ihr zukünftiges Studium!