SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 2: Abbildungen, Funktionen mehrerer Variablen, Vektorfunktionen, Felder, Folgen und Reihen

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

November 2, 2020

Übungsaufgabe

Bonuspunkt (Änderungen!):

Wer mindestens 50% der Punkte der Übungsaufgaben als vorrechenbar angekreuzt hat, bekommt 10 Bonuspunkte in der Klausur.

- 2x Vorrechnen in den Übungsgruppen (wenn bei Aufruf nicht vorgerechnet werden kann, verfallen alle Punkte des Übungsblattes)

- Abgabe der Ergebnisse (vor Ihrer Übungsbesprechung) -- Die Tutor*innen bewerten, ob die Ergebnisse vorrechenbar sind.

Das Erfüllen einer der beiden oben genannten Punkte reicht aus, um die 10 Bonuspunkte zu erhalten.

Video der Vorlesung

- Nach jeder Vorlesung wird das aufgezeichnete Video hochgeladen.

Vorlesung:

Montag, 5.DS (14:50 - 16:20), online über Zoom (Link).
Erste Vorlesung: Montag, 26.10.2020.
Nach jeder Vorlesung wird das aufgezeichnete Video hochgeladen.

Sprechstunde: Dienstag 10:30 - 11:30, BZW/A410 (Termin bevorzugt)

Folien und Videos:

Vorlesung1 (hochgeladen am 26.10.2020, aktualisiert am 26.10.2020); Video

Übungsblätter:

Übungsblatt1 (hochgeladen am 26.10.2020)

Video der Vorlesung

- Nach jeder Vorlesung wird das aufgezeichnete Video hochgeladen.

Vorlesung:

Montag, 5.DS (14:50 - 16:20), online über Zoom (Link).
Erste Vorlesung: Montag, 26.10.2020.
Nach jeder Vorlesung wird das aufgezeichnete Video hochgeladen.

Sprechstunde: Dienstag 10:30 - 11:30, BZW/A410 (Termin bevorzugt)

Folien und Videos:

Vorlesung1 (hochgeladen am 26.10.2020, aktualisiert am 26.10.2020); Video

Übungsblätter:

Übungsblatt1 (hochgeladen am 26.10.2020)

Passwort: LA_WS2021

§ 1. Vektoralgebra

Letze Vorlesung:

- Skalar/Vektor
- Rechenregeln für Vektoren
- Vektorraum

§ 1.3 Vektorraum

- Orthonormalbasis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

  - Die Vektoren sind orthogonal zueinander.

    $$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ wenn } i \neq j$$

  - Die Vektoren sind normiert.

    $$|\vec{e}_i| = 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

§ 1.3 Vektorraum

- Orthonormalbasis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

  - Die Vektoren sind orthogonal zueinander.

    $$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ wenn } i \neq j$$

  - Die Vektoren sind normiert.

    $$|\vec{e}_i| = 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

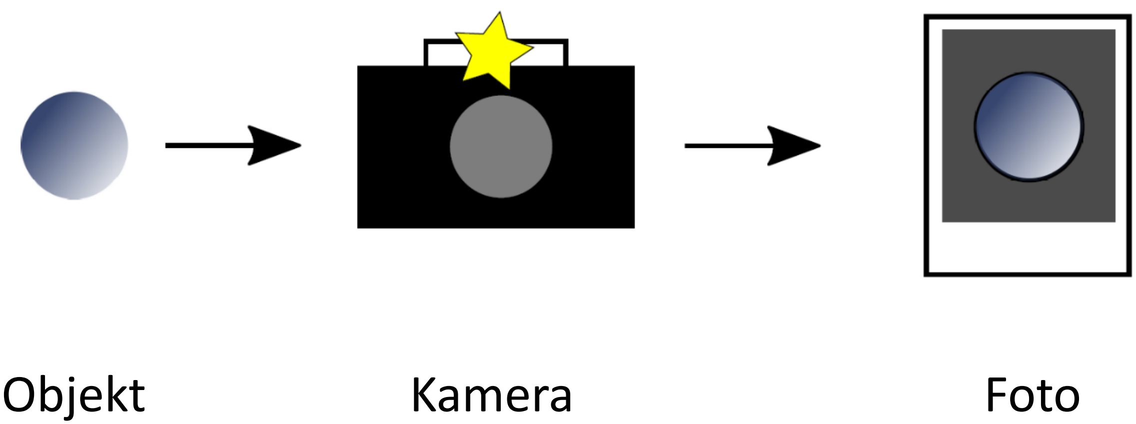
Beispiel: kartesische Standard-Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

§ 2. Abbildungen, Funktionen mehrerer Variablen, Vektorfunktionen, Felder, Folgen und Reihen

Heute: viele Konzepte, nicht so viele Berechnungen…

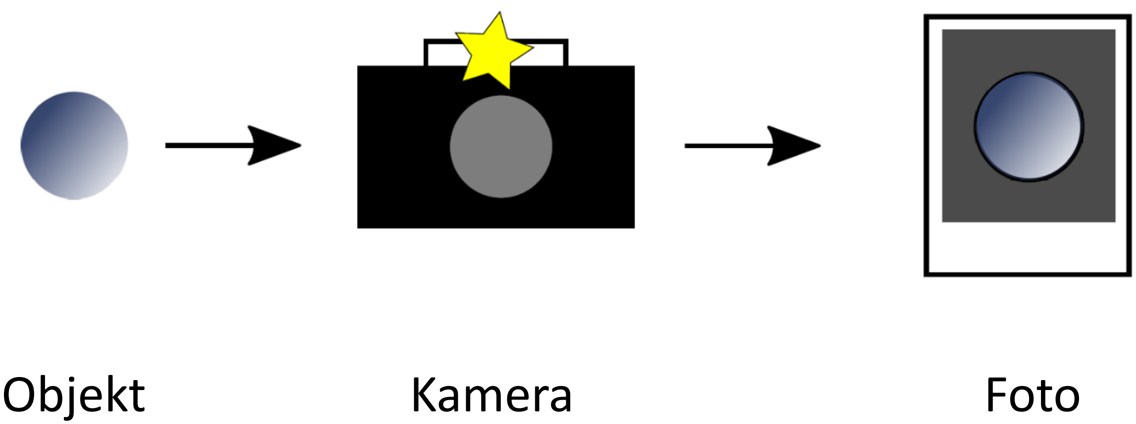
§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

Abbildung von dem Alltag: das Foto



§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

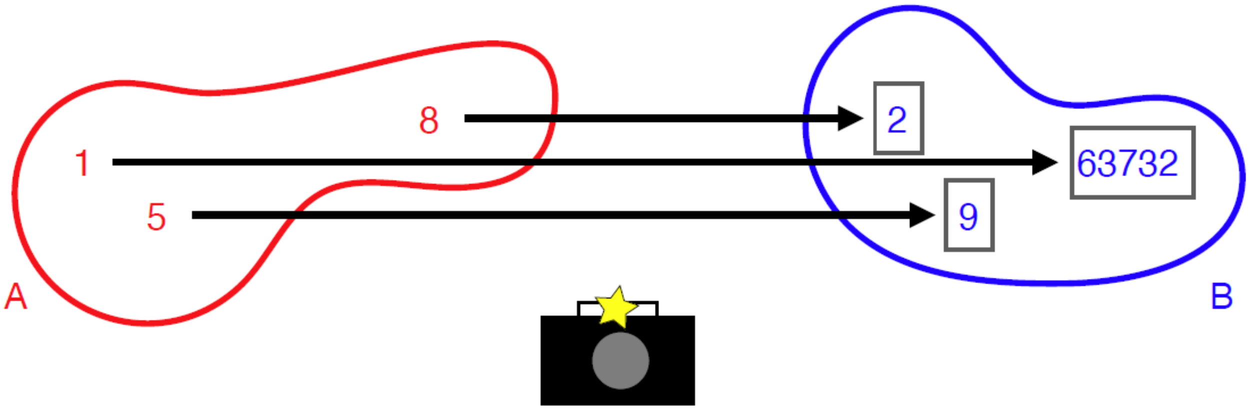
Abbildung von dem Alltag: das Foto



Kamera: Start-Objekten $\longmapsto$ End-Objekten

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

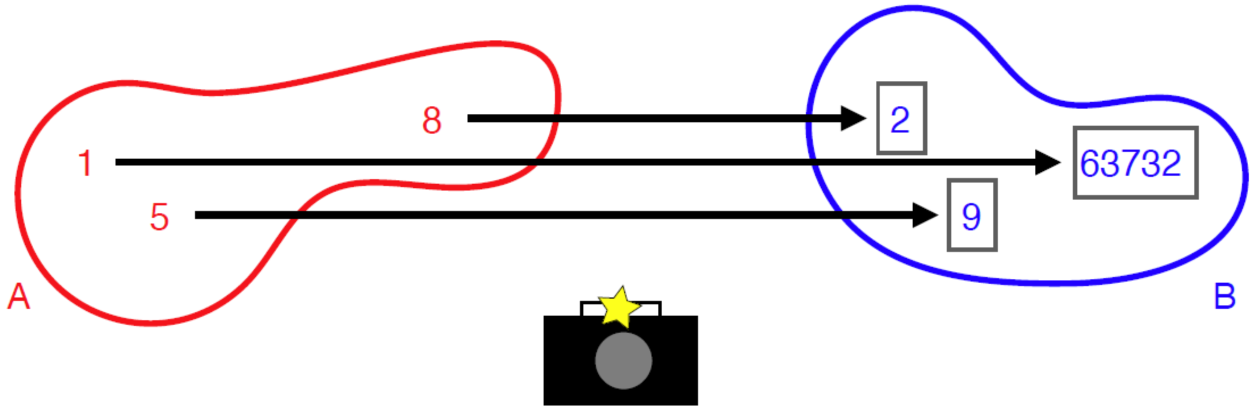
- Abbildung: Zuordnung von zwei Mengen (A und B von Zahlen)



eine Funktion *f*

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

- Abbildung: Zuordnung von zwei Mengen (A und B von Zahlen)

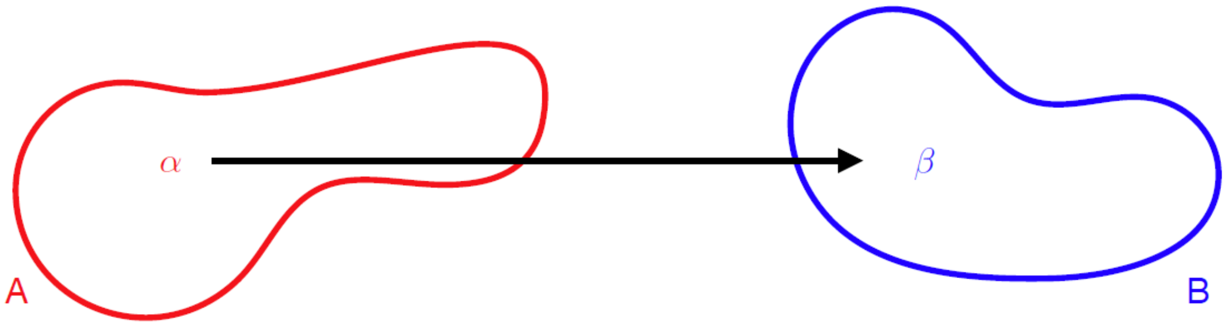


eine Funktion f

➢ Durch die Funktion f wird jedes Element der Menge A wird einem und nur einem Element der Menge B zugeordnet.

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

- Abbildung: Zuordnung von zwei Mengen (A und B von Zahlen)

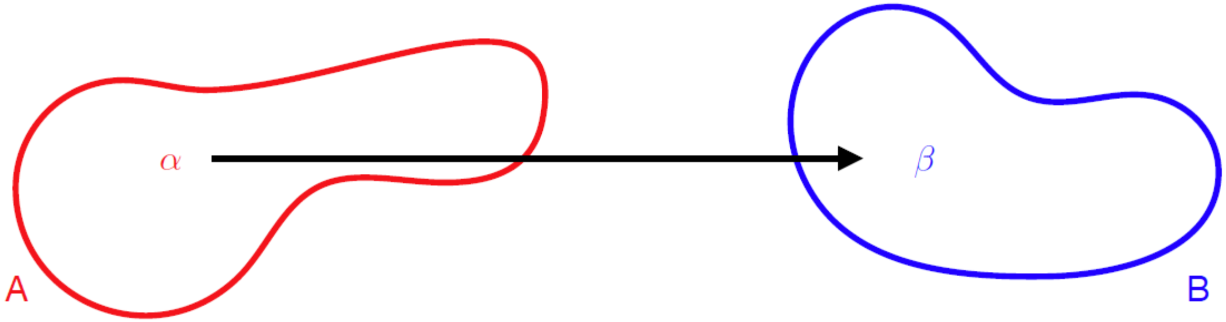


Definitionsbereich

Wertebereich

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

- Abbildung: Zuordnung von zwei Mengen (A und B von Zahlen)



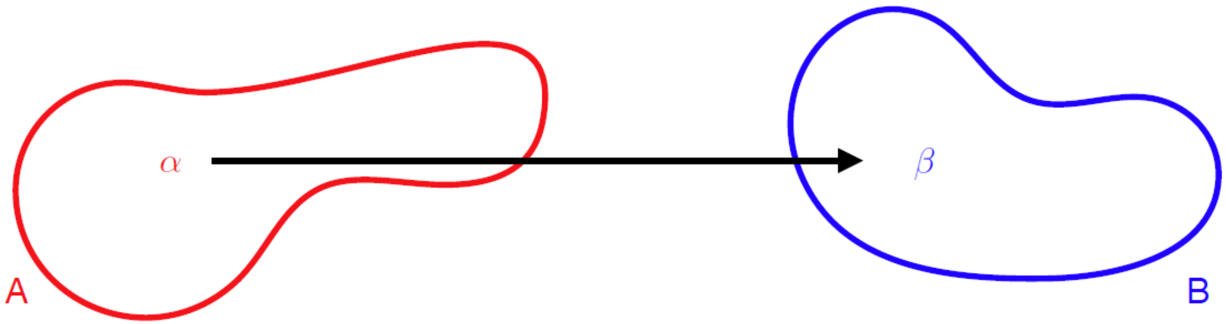
Definitionsbereich

Wertebereich

$$f: A \to B, \alpha \mapsto f(\alpha)$$

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

- Abbildung: Zuordnung von zwei Mengen (A und B von Zahlen)



reelle Zahlen

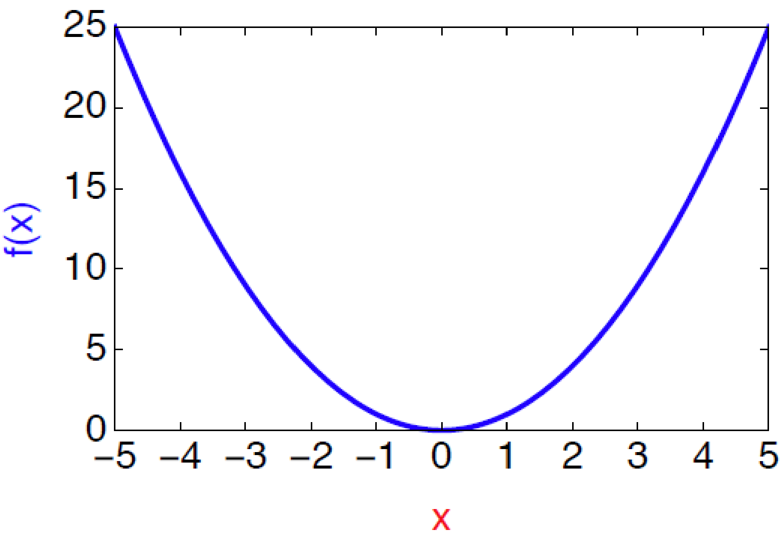
reelle Zahlen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \mapsto f(\alpha)$$

$$\beta = f(\alpha)$$

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

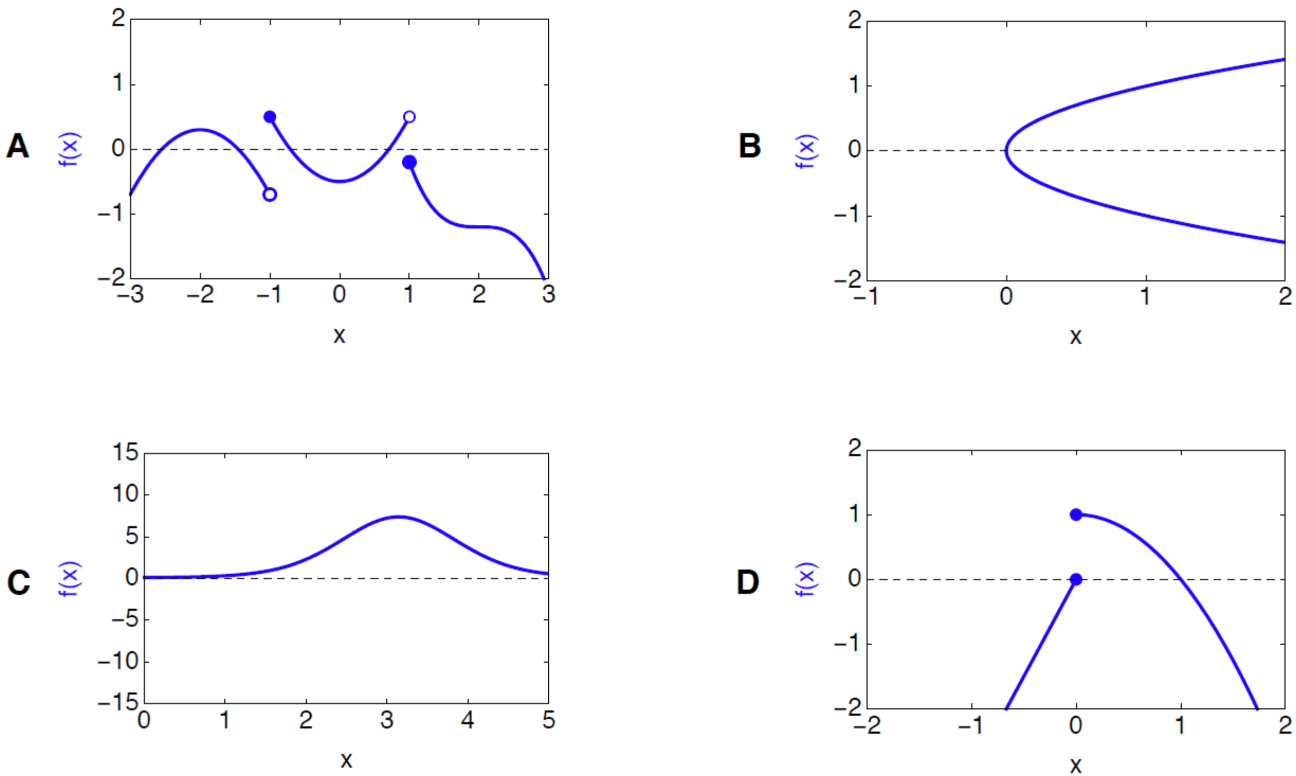
Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2$



$f(x) = x^2$

§ 2.1 Der Begriff der Abbildung

Welcher dieser Graphen zeigt eine Funktion?



§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Funktion f: Zuordnung zwischen zwei Mengen $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ und $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$

$$f: A \to B, \alpha \mapsto \beta = f(\alpha)$$

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Funktion f: Zuordnung zwischen zwei Mengen $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$ und $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots\}$

$$f: A \to B,\ \alpha \mapsto \beta = f(\alpha)$$

Können wir eine Funktion f^{-1} finden, so dass $\alpha = f^{-1}(\beta)$?

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Funktion f: Zuordnung zwischen zwei Mengen $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ und $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots\}$

$$f: A \to B,\ \alpha \mapsto \beta = f(\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[rr, bend left, "f"] & & \beta \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

- Umkehrfunktion f^{-1}: gegeben sei β, was ist die passende α mit $f(\alpha) = \beta$.

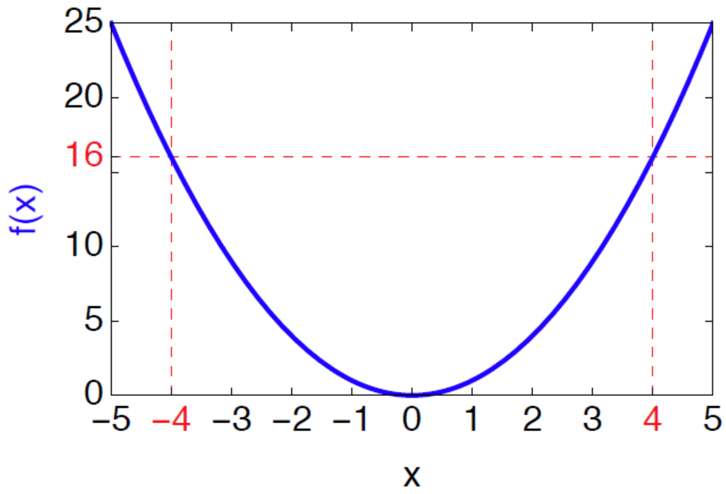
$$\Rightarrow \quad f^{-1}(\beta) = \alpha$$

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Warnung (!): Die Umkehrfunktion ist nicht immer eindeutig definiert.

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Warnung (!): Die Umkehrfunktion ist nicht immer eindeutig definiert.

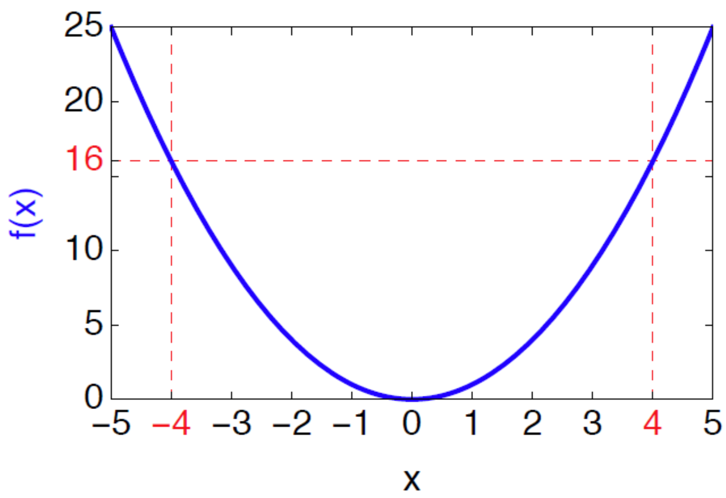


$$f(\alpha) = \beta$$

$$f^{-1}(\beta) = \alpha$$

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Warnung (!): Die Umkehrfunktion ist nicht immer eindeutig definiert.



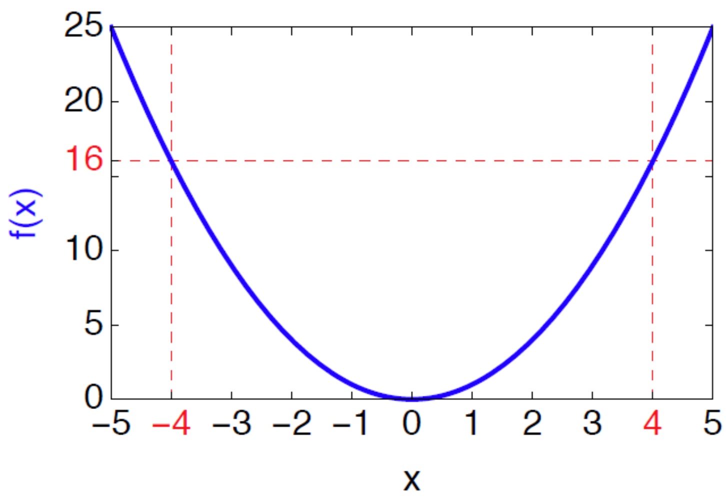
$$f(\alpha) = \beta$$

$$f^{-1}(\beta) = \alpha$$

$f(x) = x^2$ ⇒ $f(4) = 4^2 = 16$, $f(-4) = (-4)^2 = 16$ ⇒ $f^{-1}(16) = ?$

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

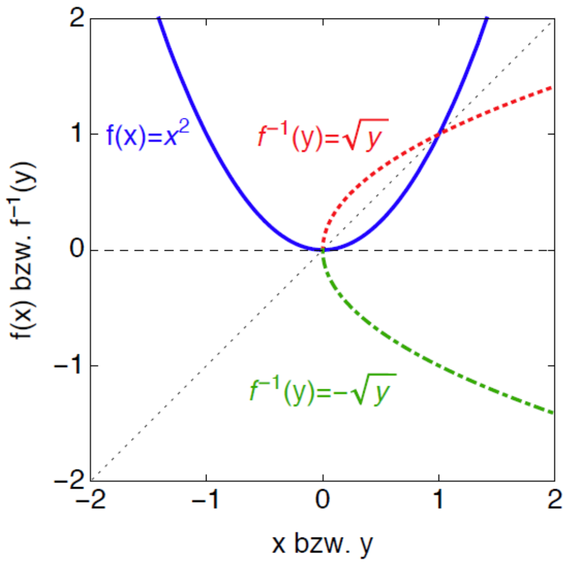
- Antwort: definiere zwei „Zweige" der Umkehrfunktion!



$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(y) = \sqrt{y} & \text{auf dem ersten Zweig} \\ f^{-1}(y) = -\sqrt{y} & \text{auf dem zweiten Zweig} \end{cases}$$

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

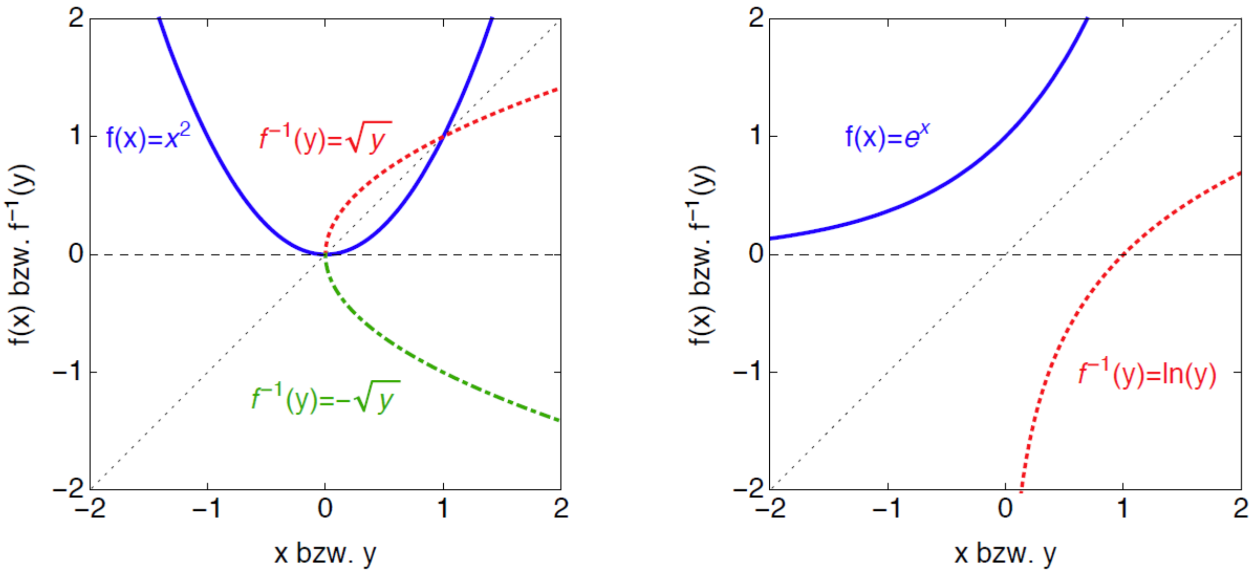
- Antwort: definiere zwei „Zweige" der Umkehrfunktion!



$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{-1}(y) = \sqrt{y} & \text{auf dem ersten Zweig} \\ f^{-1}(y) = -\sqrt{y} & \text{auf dem zweiten Zweig} \end{cases}$$

§ 2.2 Die Umkehrfunktion

- Geometrische Interpretation:



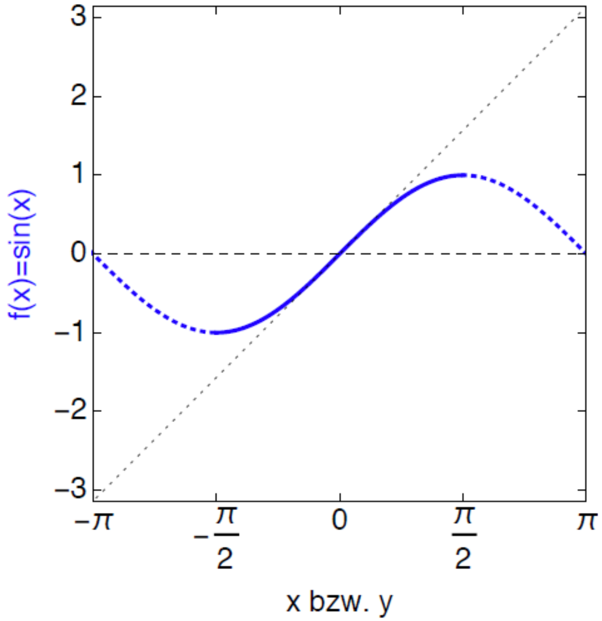
Umkehrfunktion = Spiegelung der Funktion an Hauptdiagonalen!

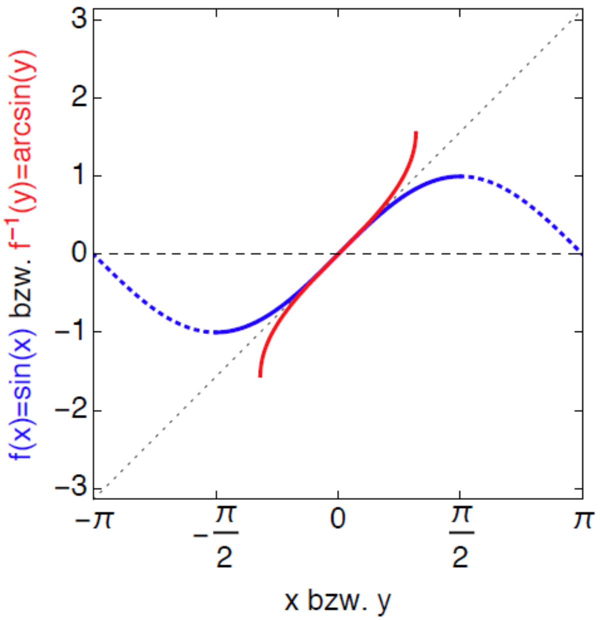
§ 2.2 Die Umkehrfunktion

Mehr Beispiele:

$f: \mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \sin(x)$

$f^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ y \mapsto \arcsin(y)$

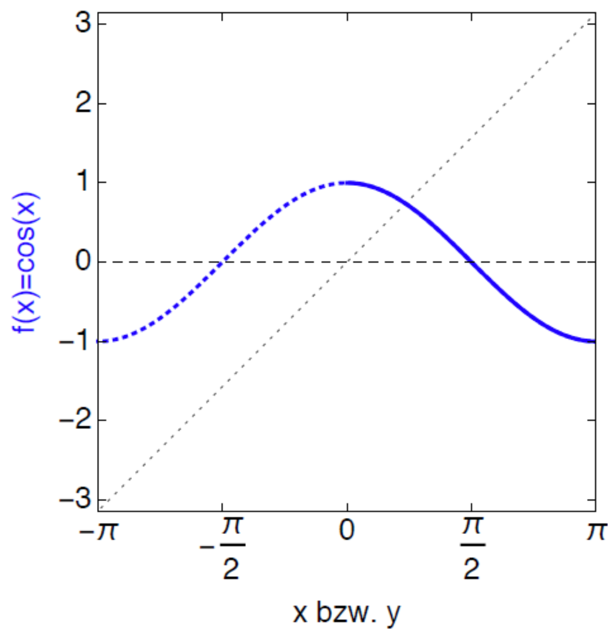




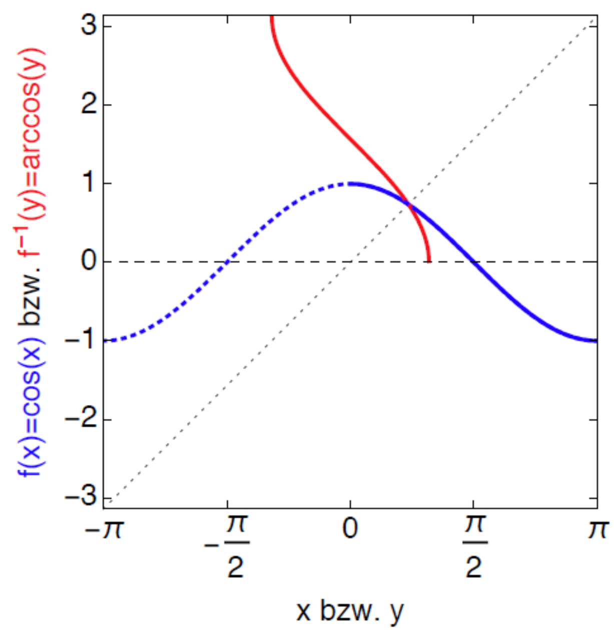
§ 2.2 Die Umkehrfunktion

Mehr Beispiele:

$f: \mathbb{R} \to [-1,1],\ x \mapsto \cos(x)$



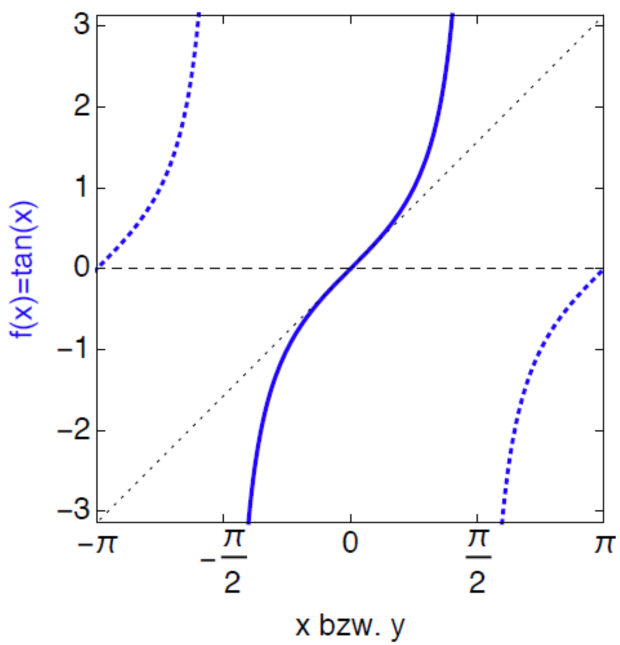
$f^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi],\ y \mapsto \arccos(y)$



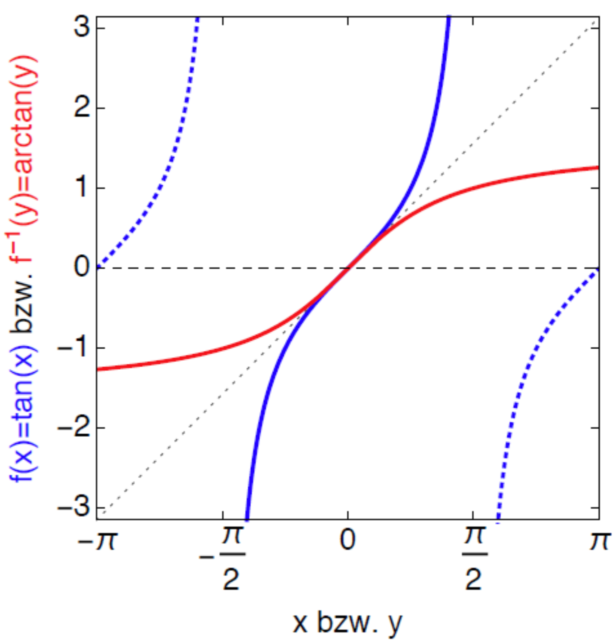
§ 2.2 Die Umkehrfunktion

Mehr Beispiele:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tan(x)$

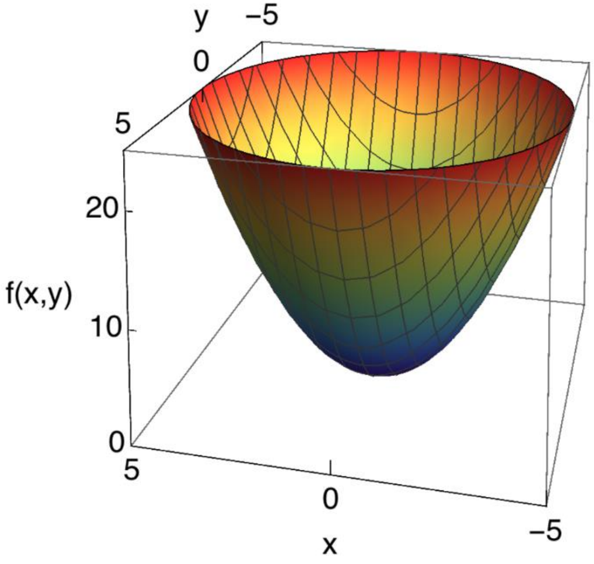


$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ y \mapsto \arctan(y)$



§ 2.3 Skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen

- Beispiel: $f(x,y) = x^2 + y^2$

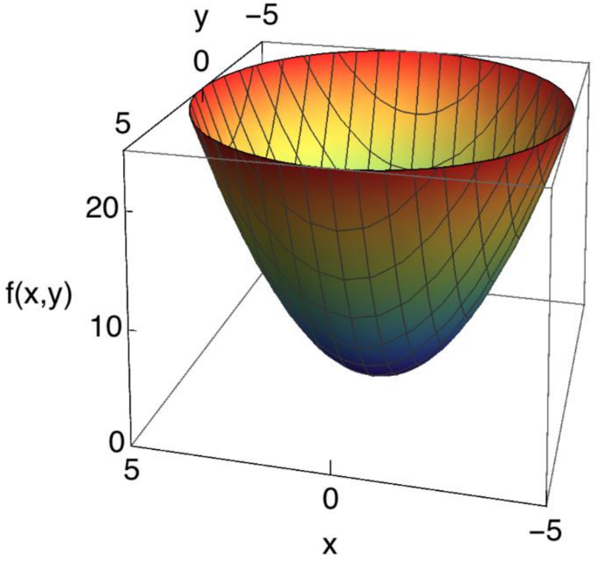


$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, (x,y) \mapsto x^2 + y^2$$

§ 2.3 Skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen

- Vektor-Notation: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

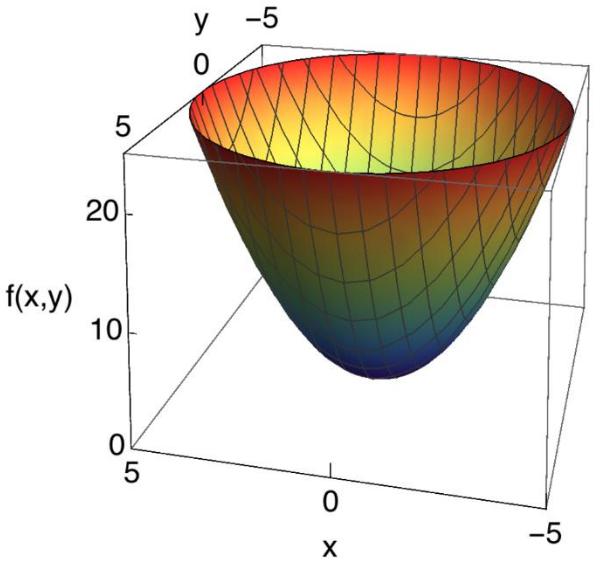


$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

§ 2.3 Skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen

- Vektor-Notation: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{r}) = |\vec{r}|^2$$

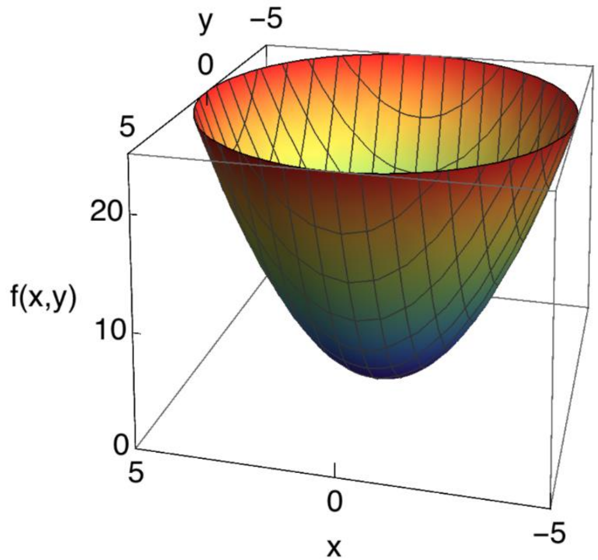


$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+, \vec{r} \mapsto |\vec{r}|^2$$

§ 2.3 Skalarwertige Funktionen mehrerer Variablen

- Vektor-Notation: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

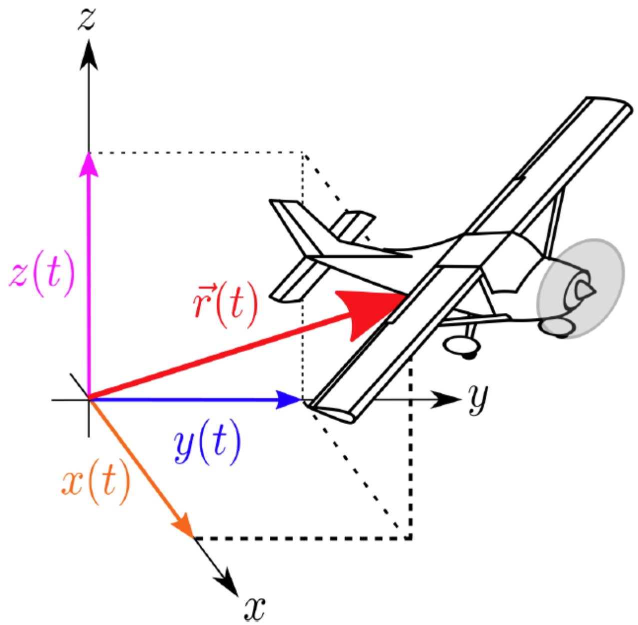
$$f(x, y) = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad f(\vec{r}) = |\vec{r}|^2$$



- Im Allgemeinen: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

§ 2.4 Vektorwertige Funktionen einer Variablen

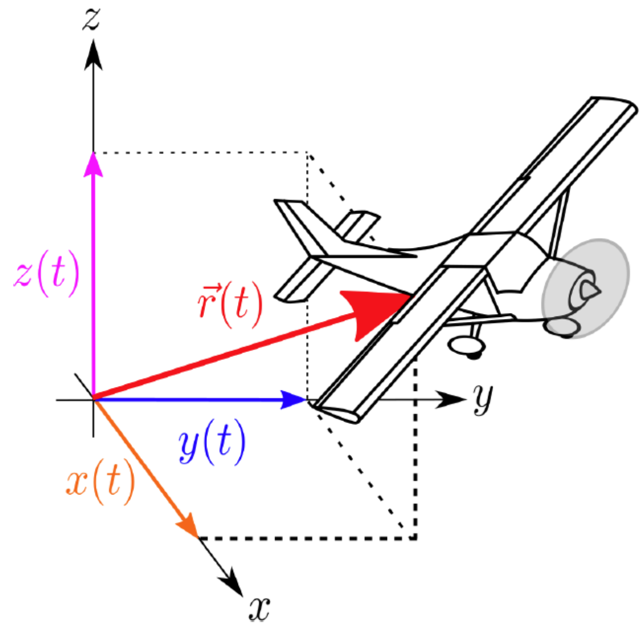
- Beispiel: Ortsvektor des Flugzeugs als Funktion der Zeit



$$\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

§ 2.5 Vektorwertige Funktionen einer Variablen

- Beispiel: Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs als Funktion des Ortsvektors



$$\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} \mapsto \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} v_x(\vec{r}) \\ v_y(\vec{r}) \\ v_z(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

§ 2.6 Felder

- Skalarfelder:

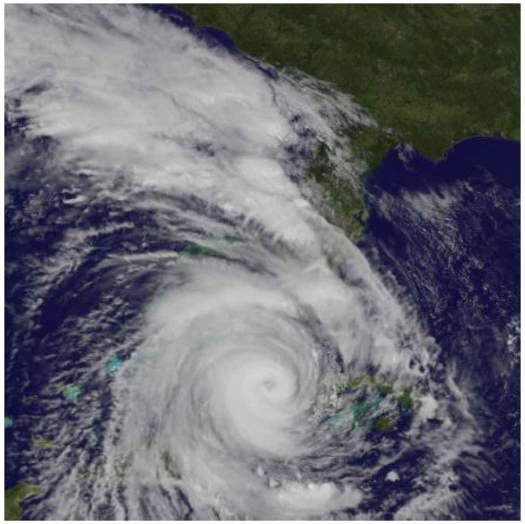
  Beispiele: Temperatur $T(\vec{r}, t)$, Dichte $\rho(\vec{r}, t)$ …

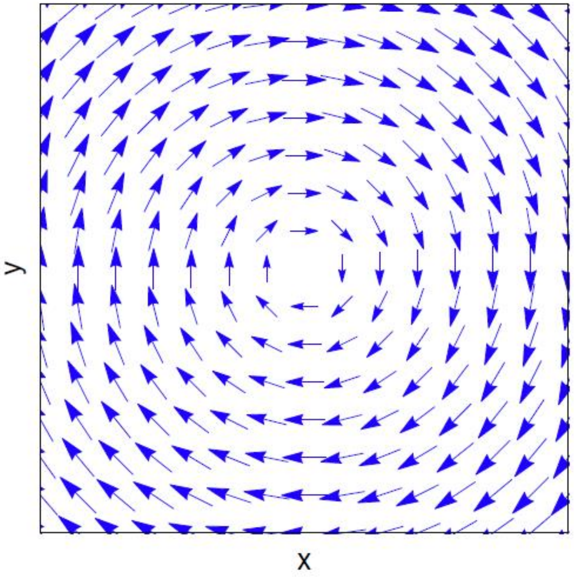
- Vektorfelder:

  Beispiele: Kraft $\vec{F}(\vec{r}, t)$, Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$ …

§ 2.6 Felder

Windgeschwindigkeit $\vec{v}(x, y, t)$:





$\vec{v}(x, y, t)$

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Folge: Sequenz von Zahlen

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad n \mapsto a_n$$

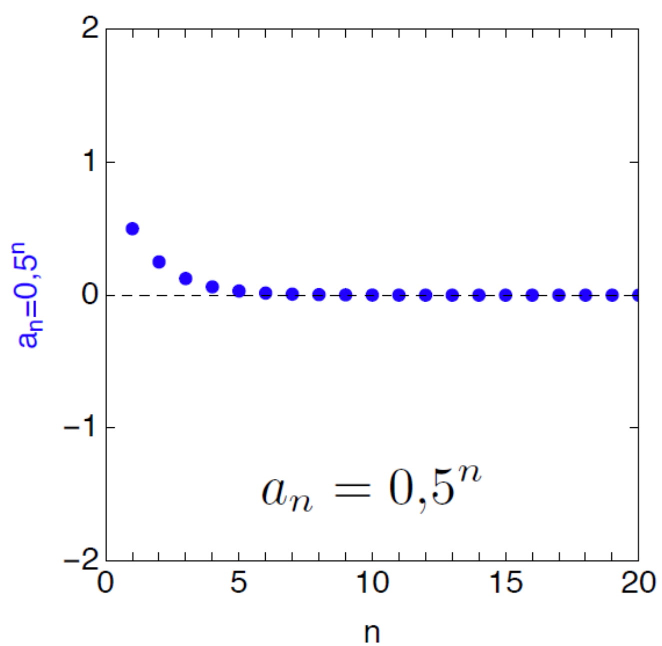
natürliche Zahlen

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Folge: Sequenz von Zahlen

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{X}, \quad n \mapsto a_n$$

natürliche Zahlen



$$a_n = 0.5^n \; (n = 1,2, \ldots)$$

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Eine Folge a_i ist konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n : |a_i - a_\infty| < \epsilon \quad \forall i > n$$

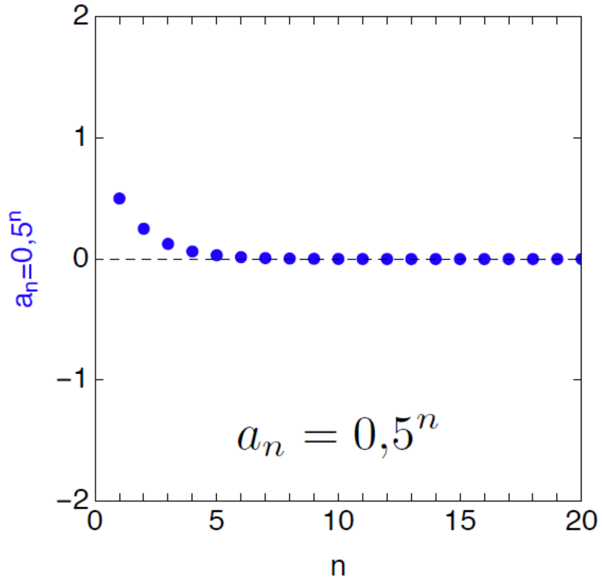
In einfachen Worten: $a_\infty = \lim_{i \to \infty} a_i = ?$

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Eine Folge a_i ist konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n : |a_i - a_\infty| < \epsilon \quad \forall i > n$$

In einfachen Worten: $a_\infty = \lim_{i \to \infty} a_i = ?$



$a_n = 0.5^n \ (n = 1,2, \dots)$

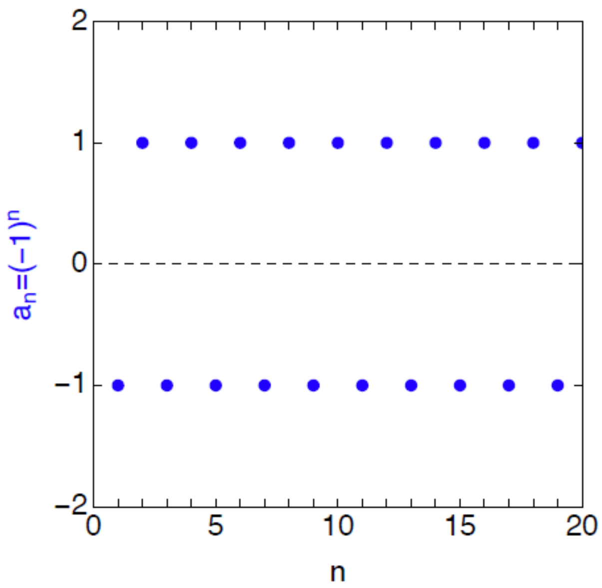
$a_\infty = 0$ konvergent!

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Eine Folge a_i ist konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n : |a_i - a_\infty| < \epsilon \quad \forall i > n$$

In einfachen Worten: $a_\infty = \lim_{i \to \infty} a_i = ?$



$$a_n = (-1)^n \; (n = 1,2, \dots)$$

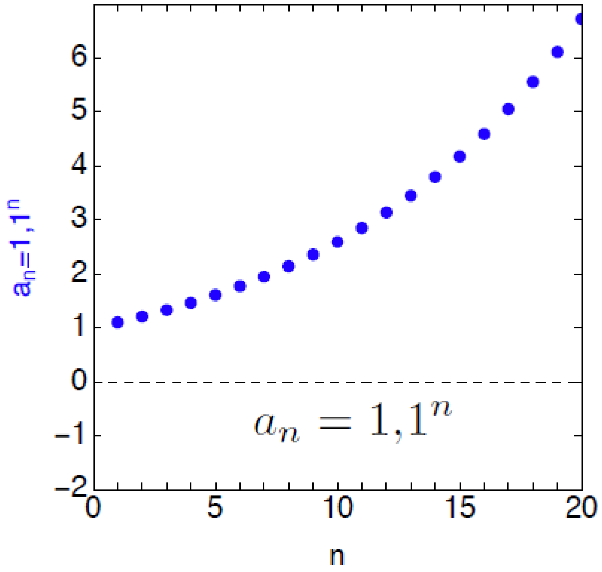
a_∞ existiert nicht: Nicht konvergent!

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Eine Folge a_i ist konvergent, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n : |a_i - a_\infty| < \epsilon \quad \forall i > n$$

In einfachen Worten: $a_\infty = \lim_{i \to \infty} a_i = ?$



$a_n = 1.1^n \ (n = 1,2, \dots)$

$a_\infty \to \infty$ divergent (nicht konvergent)!

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Reihe: Summe der Folge

$$s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$$

$$\lim_{j \to \infty} s_j = s_\infty$$

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Reihe: Summe der Folge

$$s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$$

$$\lim_{j \to \infty} s_j = s_\infty$$

Beispiel: geometrische Reihe $a_i = a_0 q^i \; (i = 0,1,2 \ldots)$

$$s_j = a_0 \frac{1 - q^{j+1}}{1 - q}$$

§ 2.7 Folgen und Reihen

- Reihe: Summe der Folge

$$s_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$$

$$\lim_{j \to \infty} s_j = s_\infty$$

Beispiel: geometrische Reihe $a_i = a_0 q^i \; (i = 0,1,2 \ldots)$

$$s_j = a_0 \frac{1 - q^{j+1}}{1 - q}$$

Wenn $|q| < 1$, $\quad s_\infty = \dfrac{a_0}{1 - q}$ $\quad$ konvergent!