TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 3: Rechnen mit Indizes -- Matrizen und Tensoren

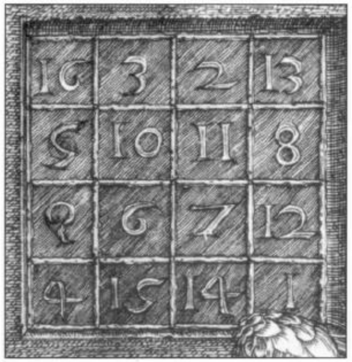
Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

November 9, 2020

§ 3.1 Was ist eine Matrix?

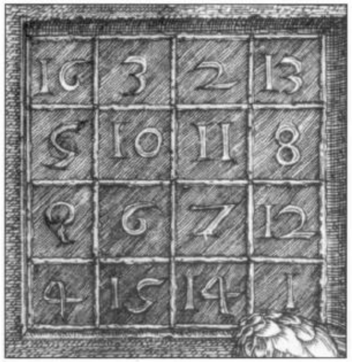
- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform



Wikipedia: Detail of “Melancholia I”

§ 3.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

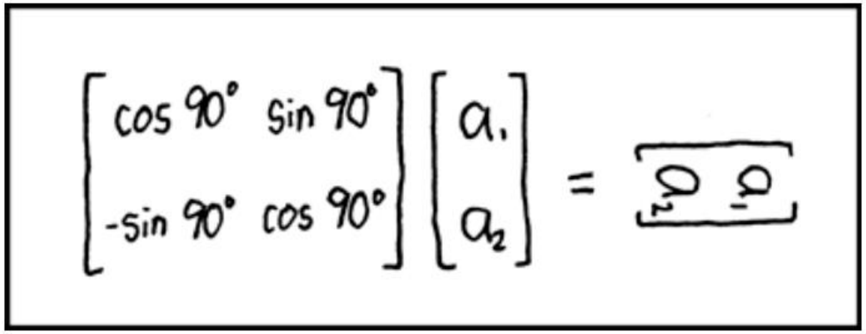


Wikipedia: Detail of “Melancholia I”

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tau\, e\, a_{\mathrm{c}} & 0 \\ \tau_\epsilon\, e\, a_{\mathrm{c}}\, \mu & -2\, \tau_\epsilon\, a_{\mathrm{g}}\, T \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

§ 3.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren



XKCD 184

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	**Spalte 2**	**Spalte 3**	**Spalte 4**
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

M_{13}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

M_{31}

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

m Zeilen, n Spalten $\Rightarrow$ eine $(m \times n)$-Matrix

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Addition und Subtraktion
  - gilt nur für Matrizen gleicher Größe (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)
  - erfolgt elementweise

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Addition und Subtraktion
  - gilt nur für Matrizen gleicher Größe (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)
  - erfolgt elementweise

$$A + B = C \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \text{und} \quad A - B = D \quad \Leftrightarrow \quad D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 4-2 \\ 2-6 & 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation mit Skalaren
  - erfolgt elementweise

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation mit Skalaren
  - erfolgt elementweise

$$B = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad B_{ij} = \lambda A_{ij}$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition
  - Vertauschen von Zeilen und Spalten

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition
  - Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$B = A^T \quad \Leftrightarrow \quad B_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition
  - Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$B = A^T \quad \Leftrightarrow \quad B_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition

Spaltenvektor ⇨ Zeilenvektor

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}^{\,T} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition

Spaltenvektor ⇨ Zeilenvektor

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}^T = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

3 Zeilen, 1 Spalte

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition

Spaltenvektor ⇨ Zeilenvektor

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}^T = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

3 Zeilen, 1 Spalte

Spaltenvektor: $(m \times 1)$-Matrix

Zeilenvektor: $(1 \times n)$-Matrix

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj}$$

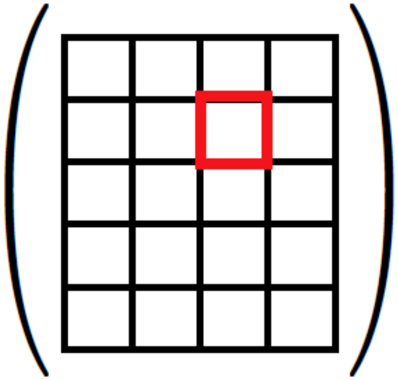
§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



C_{23}

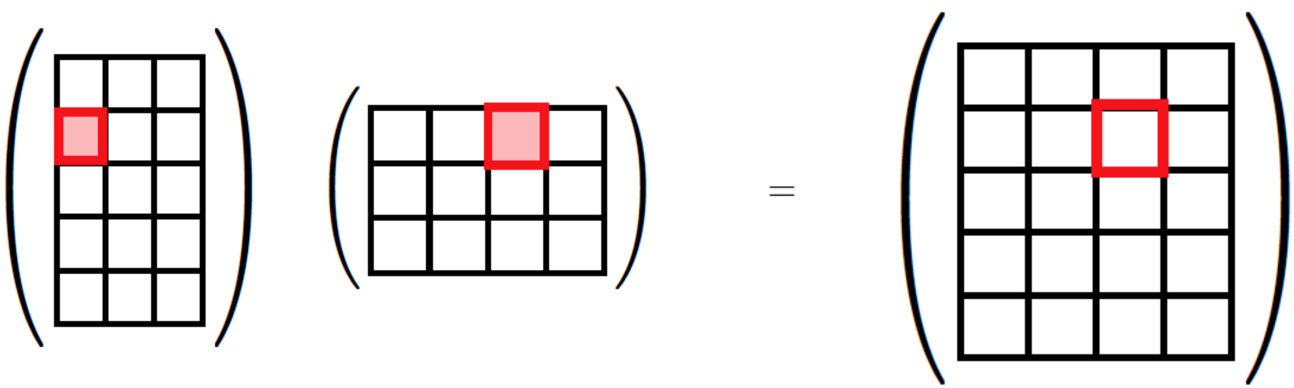
§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

    - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

    - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



$$A_{21}\,B_{13} = C_{23}$$

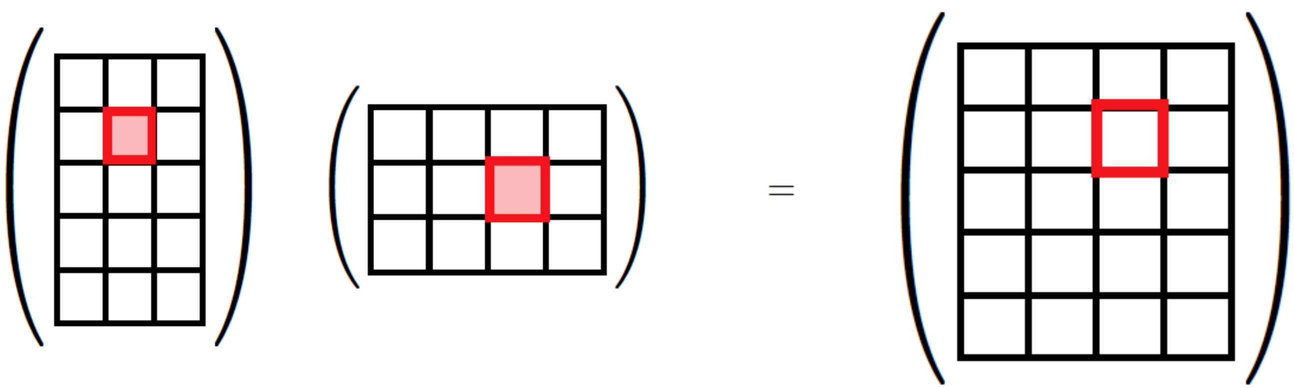
§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



$$A_{21}\,B_{13} + A_{22}\,B_{23} \qquad = \qquad C_{23}$$

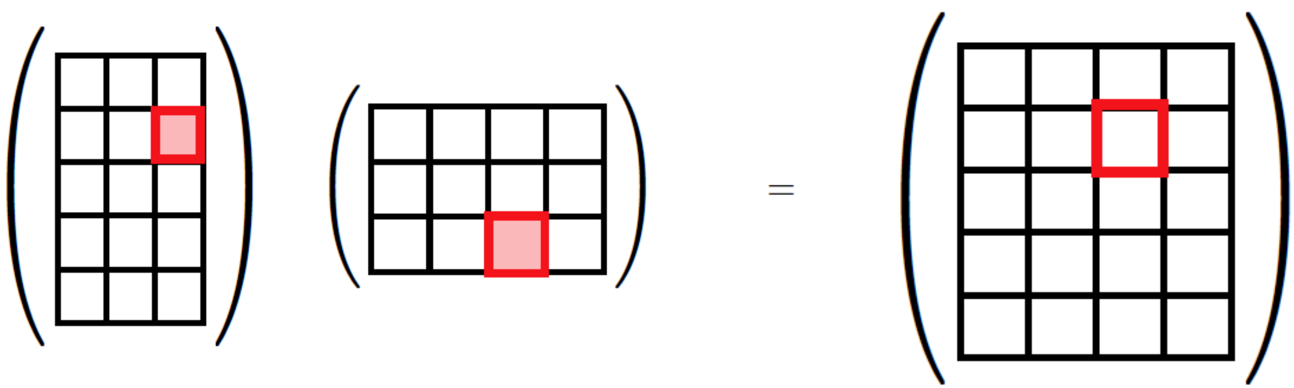
§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



$$A_{21}\,B_{13} + A_{22}\,B_{23} + A_{23}\,B_{33} \qquad = \qquad C_{23}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

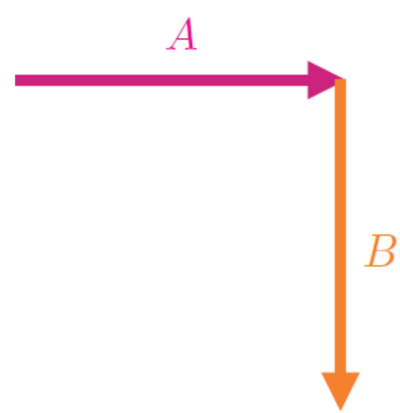
- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$

$C = A\,B$:



§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Einige wichtige Matrizenarten:
  - Quadratische Matrix: $(n \times n)$-Matrix (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Einige wichtige Matrizenarten:
  - Quadratische Matrix: $(n \times n)$-Matrix (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)
  - Einheitsmatrix: Einträge auf „Hauptdiagonalen“ alle 1, sonst nur 0

$$\mathbb{1}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1}_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Einige wichtige Matrizenarten:

  - Quadratische Matrix: $(n \times n)$-Matrix (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)

  - Einheitsmatrix: Einträge auf „Hauptdiagonalen“ alle 1, sonst nur 0

$$\mathbb{1}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1}_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Symmetrische Matrix: „Matrix = Spiegelbild an der Diagonalen“ ($M = M^T$)

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M^T$$

§ 3.3 Spur einer Matrix

- Spur: eine der wichtigsten Kenngrößen einer quadratischen Matrix
  - Spur = Summe der Diagonalelemente
  - Symbol: **Sp** (oder **tr**)

$$A \text{ ist } (n \times n)\text{-Matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

§ 3.3 Spur einer Matrix

- Spur: eine der wichtigsten Kenngrößen einer quadratischen Matrix
  - Spur = Summe der Diagonalelemente
  - Symbol: **Sp** (oder **tr**)

$$A \text{ ist } (n \times n)\text{-Matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Beispiel: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

§ 3.3 Spur einer Matrix

- Spur: eine der wichtigsten Kenngrößen einer quadratischen Matrix
  - Spur = Summe der Diagonalelemente
  - Symbol: **Sp** (oder **tr**)

$$A \text{ ist } (n \times n)\text{-Matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

Beispiel: $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(A) = 1 + 4 + 9 = 14$$

§ 3.3 Spur einer Matrix

- Eigenschaften:
  - Spur ist „lineare Abbildung“:
  - Spur ist Transposition egal:
  - Spur ist „invariant unter zyklischer Vertauschung“:

§ 3.3 Spur einer Matrix

- Eigenschaften:

  - Spur ist „lineare Abbildung“:

$$\mathrm{Sp}(\lambda_1\, A + \lambda_2\, B) = \lambda_1\, \mathrm{Sp}(A) + \lambda_2\, \mathrm{Sp}(B)$$ (λ_1, λ_2: Zahlen)

  - Spur ist Transposition egal:

$$\mathrm{Sp}(A^T) = \mathrm{Sp}(A)$$

  - Spur ist „invariant unter zyklischer Vertauschung“:

$$\mathrm{Sp}(A\, B\, C) = \mathrm{Sp}(B\, C\, A) = \mathrm{Sp}(C\, A\, B)$$

§ 3.3 Spur einer Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A\,B - 3\,C) = ?$$

§ 3.3 Spur einer Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \;,\quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \;,\quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A\,B - 3\,C) = ?$$

$$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+16+4 & 2+14+20 \\ 8+24+0 & 4+21+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 36 \\ 32 & 25 \end{pmatrix}$$

$$A\,B - 3\,C = \begin{pmatrix} 24 & 36 \\ 32 & 25 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 36 \\ 32 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 21 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 23 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A\,B - 3\,C) = \mathrm{Sp} \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 23 & 22 \end{pmatrix} = 15 + 22 = 37$$

§ 3.4 Inverse Matrix

- Inverse Matrix:
  - definiert für quadratische Matrix
  - Symbol: Inverse Matrix von A ist A^{-1}

$$A\,A^{-1} = \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad A^{-1}\,A = \mathbb{1}$$

§ 3.4 Inverse Matrix

- Inverse Matrix:
  - definiert für quadratische Matrix
  - Symbol: Inverse Matrix von A ist A^{-1}

$$A\,A^{-1} = \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad A^{-1}\,A = \mathbb{1}$$

  - Nicht jede Matrix hat eine Inverse!
  - Matrix hat Inverse falls Determinante ungleich Null (nächste Vorlesung)

§ 3.4 Inverse Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

§ 3.4 Inverse Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.4 Inverse Matrix

Idee: Löse lineares Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ? \quad \Rightarrow \quad \text{Ansatz: } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

§ 3.4 Inverse Matrix

Idee: Löse lineares Gleichungssystem

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = ? \quad \Rightarrow \quad \text{Ansatz: } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.4 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine für Gleichungssystem: Gauß-Jordan Verfahren
  - Schreibe (Matrix|Einheitsmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

§ 3.4 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine für Gleichungssystem: Gauß-Jordan Verfahren

  - Schreibe (Matrix|Einheitsmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

  - Forme um - erlaubte Operationen:
    - Multiplizieren einer Zeile (jedes Eintrags der Zeile) mit einer Zahl
    - Vertauschen von Zeilen
    - Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen (Eintrag für Eintrag)

§ 3.4 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine für Gleichungssystem: Gauß-Jordan Verfahren

➢ Schreibe (Matrix|Einheitsmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

➢ Forme um - erlaubte Operationen:

- Multiplizieren einer Zeile (jedes Eintrags der Zeile) mit einer Zahl
- Vertauschen von Zeilen
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen (Eintrag für Eintrag)

➢ Bringe linke Seite auf Einheitsmatrix-Form. Rechte Seite = inverse Matrix

§ 3.4 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine für Gleichungssystem: Gauß-Jordan Verfahren

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{nimm Zeile 1 mal } \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

§ 3.4 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine für Gleichungssystem: Gauß-Jordan Verfahren

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{nimm Zeile 1 mal } \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{ nimm Zeile 2 mal } \frac{1}{3}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)}_{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

§ 3.4 Inverse Matrix

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = ?$

§ 3.4 Inverse Matrix

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4 \text{ x Zeile 1 + Zeile 2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{10} \text{ x Zeile 2 + Zeile 1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10} \text{ x Zeile 2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$