SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 4: Rechnen mit Indizes -- Matrizen und Tensoren

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

November 16, 2020

Termin der Klausur (!)

- Der geplante Termin für die Klausur: Februar 12, 2021, 3. DS + 4. DS (?)
- Die Einschreibung für die Klausur erfolgt in Januar 2021. Details folgen.

§ 3. Rechnen mit Indizes -- Matrizen und Tensoren

Letze Vorlesung:

- Definition einer Matrix
- Rechenregeln für Matrizen (Addition/Subtraktion, Transposition, Multiplikation)
- Wichtige Matrizen (Quadratische Matrix, Einheitsmatrix, Symmetrische Matrix)
- Spur einer Matrix
- Inverse Matrix (Gauß-Jordan Verfahren)

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen
  - Symbol: **Det** (oder **det**)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \text{ Permutation von } 1 \text{ bis } n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} \cdot A_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n,\sigma(n)}$$

§ 3.5 Determinante von Matrizen

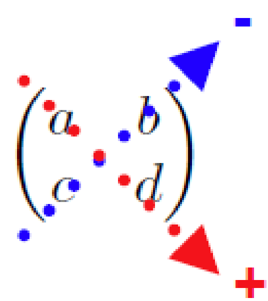
- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

  ➢ Symbol: **Det** (oder **det**)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{Det}(A) = \sum_{\sigma \text{ Permutation von } 1 \text{ bis } n} \mathsf{sgn}(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} \cdot A_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n,\sigma(n)}$$

Beispiel: 2 × 2 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = a\,d - b\,c$$



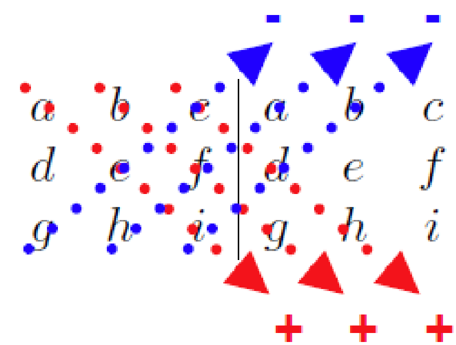
§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

Beispiel: 3×3 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - g\,e\,c - h\,f\,a - i\,d\,b$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array} \quad \Rightarrow$$



§ 3.5 Determinante von Matrizen

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\mathrm{Det}(A) = ?$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}(B) = ?$$

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

  - ➢ 2×2 und 3×3 Matrizen:

Determinante = +(Produkt der Diagonalen) - (Produkt der „nicht-Diagonalen“)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}$$

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

  - $n \times n$ Matrizen ($n > 3$): geht anders als bei (2×2) und (3×3)-Matrizen

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen
  - $n \times n$ Matrizen ($n > 3$): geht anders als bei (2×2) und (3×3)-Matrizen
  - Entwicklungssatz:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

  - $n \times n$ Matrizen ($n > 3$): geht anders als bei (2×2) und (3×3)-Matrizen

  - Entwicklungssatz:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

Matrix $\tilde{A}$:
i-ter Zeile und j-ter Spalte von A werden entfernt.

§ 3.5 Determinante von Matrizen

Beispiele:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}(B) = ?$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}(C) = ?$$

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Eigenschaften:
  - Produkt von Matrizen:
  - Vielfaches von $(n \times n)$-Matrizen:
  - Determinante der Transponierten:
  - Determinante der Inversen:

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Eigenschaften:
  - Produkt von Matrizen: $\mathrm{Det}(A\,B) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$
  - Vielfaches von $(n \times n)$-Matrizen: $\mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n\,\mathrm{Det}(A)$
  - Determinante der Transponierten: $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T)$
  - Determinante der Inversen: $\mathrm{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}$

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Eigenschaften:
  - Produkt von Matrizen: $\mathrm{Det}(A\,B) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$
  - Vielfaches von $(n \times n)$-Matrizen: $\mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n\,\mathrm{Det}(A)$
  - Determinante der Transponierten: $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T)$
  - Determinante der Inversen: $\mathrm{Det}(A^{-1}) = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}$

Matrix hat Inverse falls Determinante ungleich Null!

§ 3.5 Determinante von Matrizen

- Eigenschaften:

  - Die Determinante einer Matrix bleibt unverändert, wenn man das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte hinzuzählt.

  - Die Determinante einer Matrix bleibt unverändert, wenn man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile hinzuzählt.

  - Die Determinante einer Matrix, in der zwei Spalten (oder zwei Zeilen) Vielfache voneinander sind, ist Null. Ebenso ist die Determinante einer Matrix, in der alle Einträge in einer Spalte (oder Zeile) Null sind, gleich Null.

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

- Einsteinsche Summenkonvention: Wenn Indizes auf einer Seite der Gleichung doppelt vorkommen und über alle möglichen Werte des Index summiert wird, dann kann man das Summenzeichen einfach weglassen.

Beispiele:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i$$

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip} \, B_{pj}$$

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

- Einsteinsche Summenkonvention: Wenn Indizes auf einer Seite der Gleichung doppelt vorkommen und über alle möglichen Werte des Index summiert wird, dann kann man das Summenzeichen einfach weglassen.

Beispiele:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \, b_i$$

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip} \, B_{pj} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = A_{ip} \, B_{pj}$$

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

- Einsteinsche Summenkonvention: Wenn Indizes auf einer Seite der Gleichung doppelt vorkommen und über alle möglichen Werte des Index summiert wird, dann kann man das Summenzeichen einfach weglassen.

Beispiele:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \, b_i$$

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip} \, B_{pj} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = A_{ip} \, B_{pj}$$

freier Index Laufindex

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

- Das Kronecker-Delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

  - δ_{ij} sind die Komponenten einer $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

- Der Levi-Civita-Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk \in \{123, 231, 312\} \\ -1 & , ijk \in \{132, 321, 213\} \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Total antisymmetrisch: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel: Kreuzprodukt von zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel: Kreuzprodukt von zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Leftrightarrow c_i = \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

§ 3.6 Rechnen mit Indizes

- Der Levi-Civita-Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk \in \{123, 231, 312\} \\ -1 & , ijk \in \{132, 321, 213\} \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Total antisymmetrisch: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$
  - Rechenregeln:
$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}$$
$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijn} = 2\,\delta_{kn}$$
$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6$$

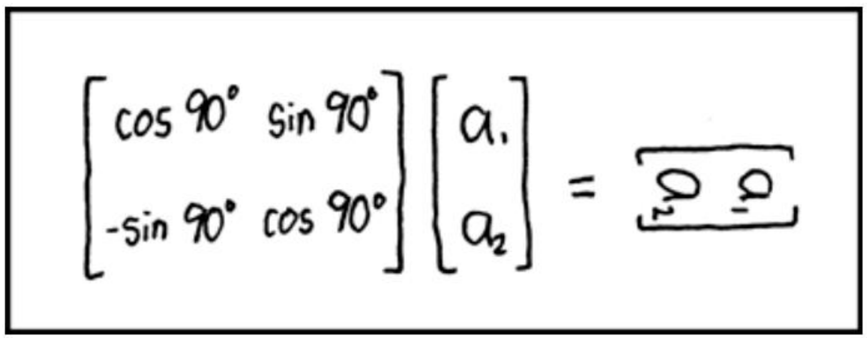
§ 3.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel: Die BAC-CAB-Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

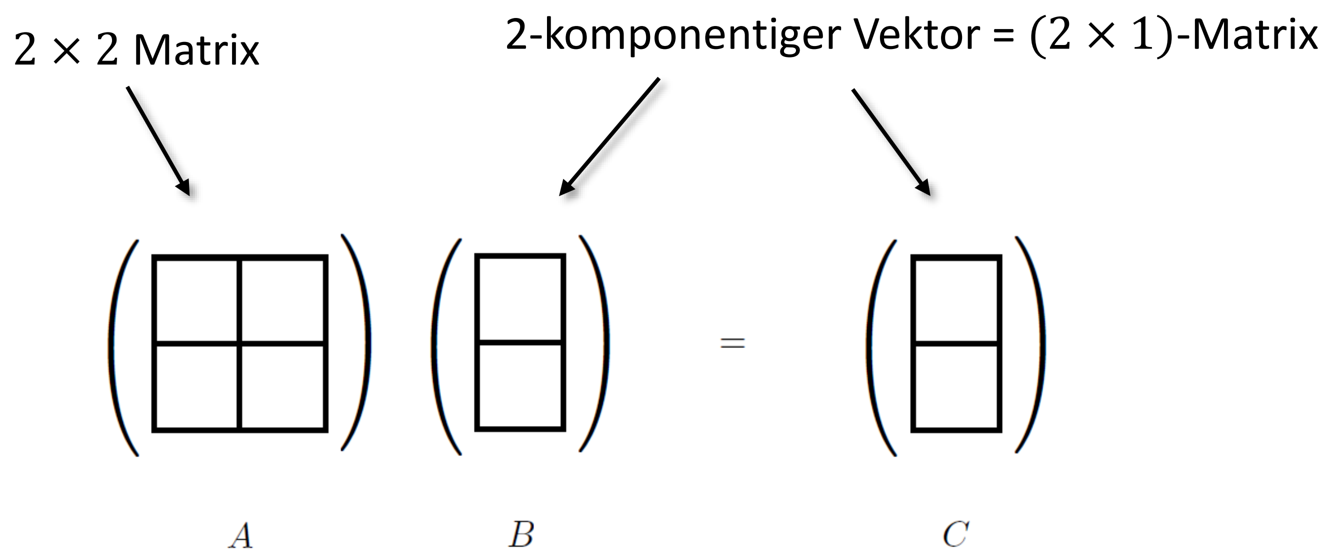
- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren



XKCD 184

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

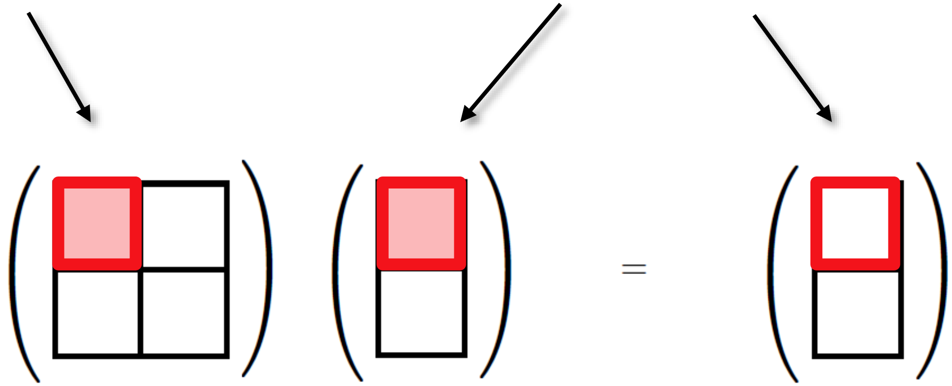


§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

2 × 2 Matrix

2-komponentiger Vektor = (2 × 1)-Matrix

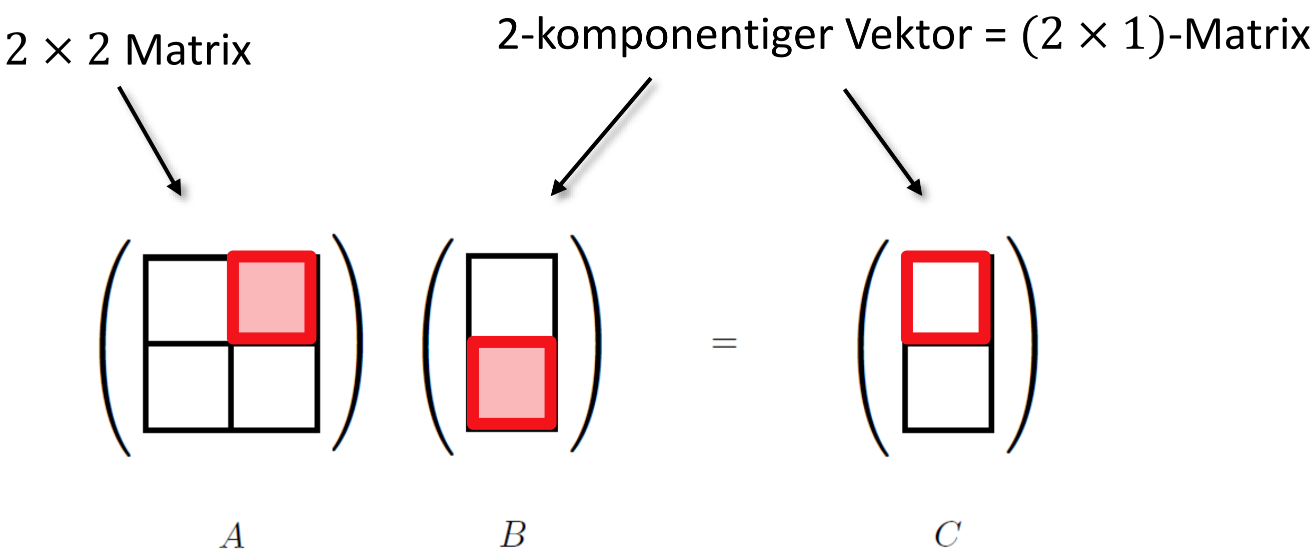


A $\quad$ B $\quad$ C

$$A_{11}\, B_{11} = C_{11}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

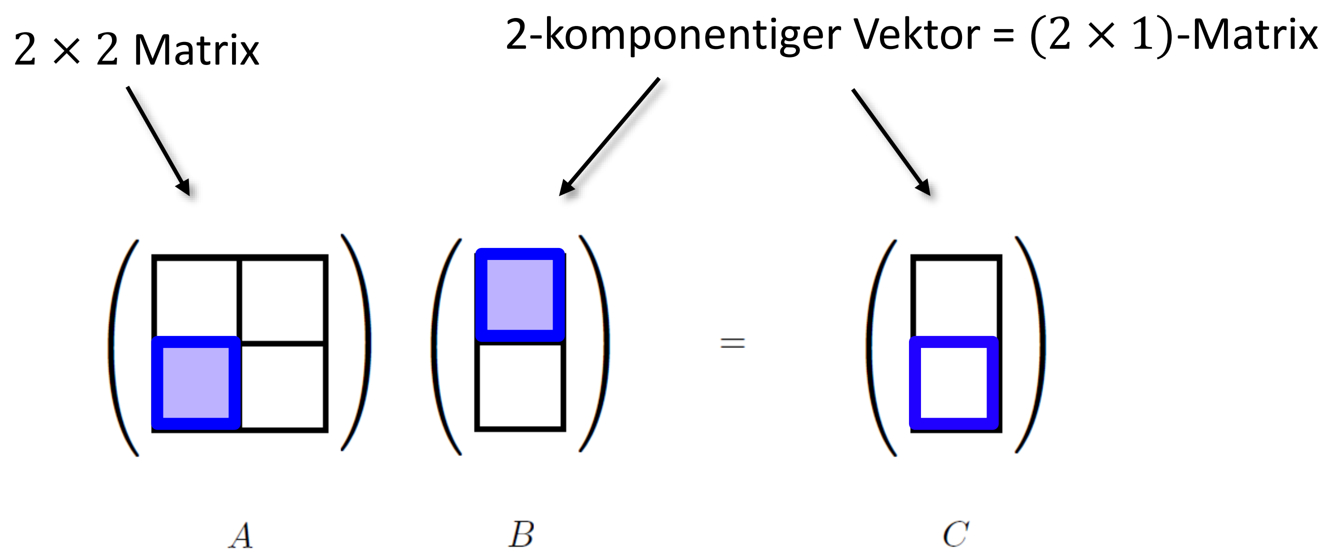
- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren



$$A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} = C_{11}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

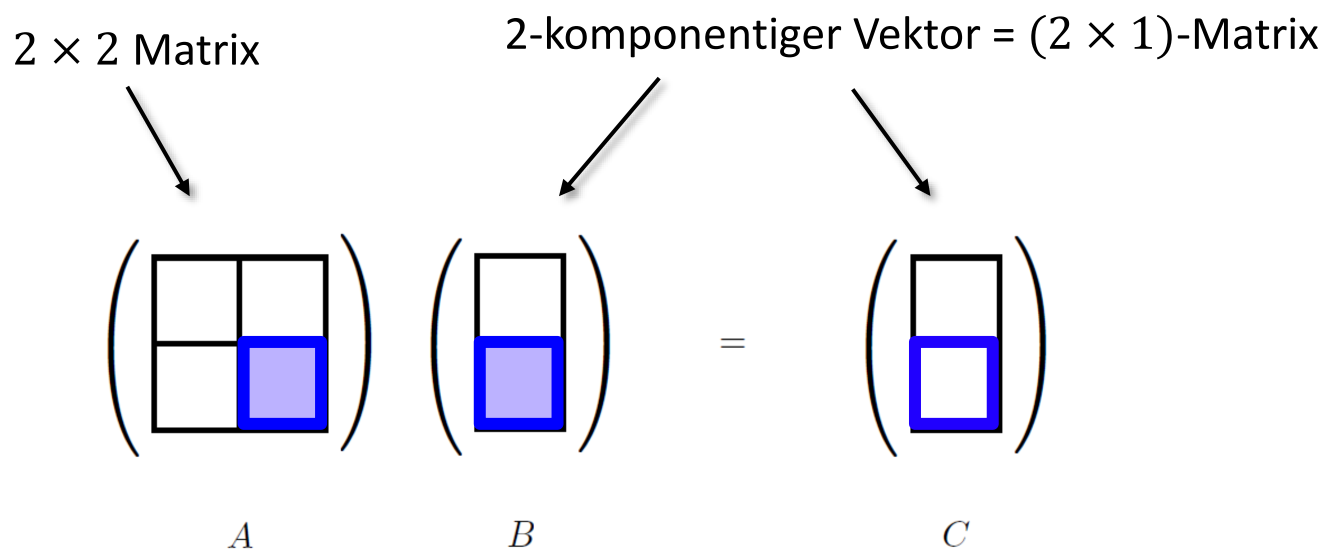


$$A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} = C_{11}$$

$$A_{21}\,B_{11} = C_{21}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren



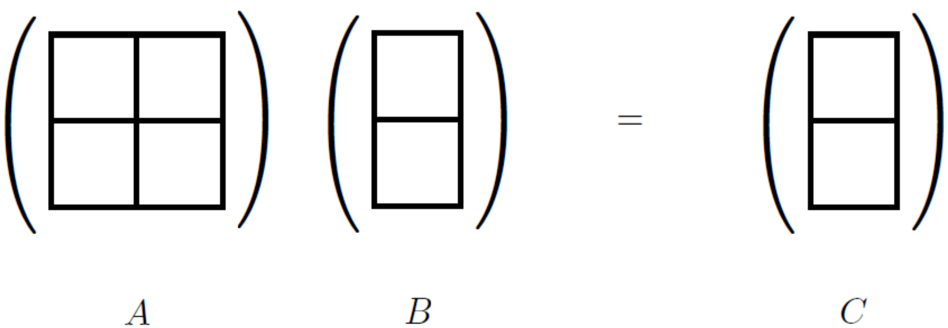
$$A_{11}\,B_{11} + A_{12}\,B_{21} = C_{11}$$

$$A_{21}\,B_{11} + A_{22}\,B_{21} = C_{21}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

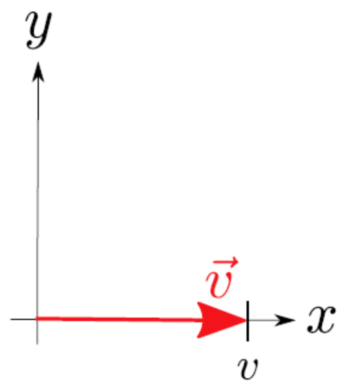
- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

Matrix A bildet Vektor B auf Vektor C ab.



§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

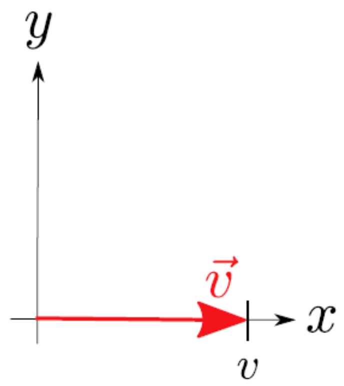
- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren
  - Drehmatrix $D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ dreht Vektor um Winkel ϕ



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = D_\phi \, \vec{v}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren
  - Drehmatrix $D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ dreht Vektor um Winkel ϕ

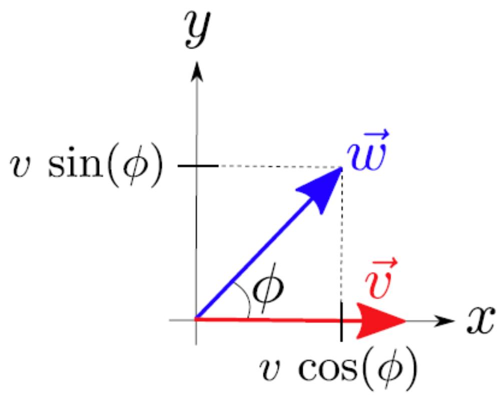


$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = D_\phi \, \vec{v} \; = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

  - Drehmatrix $D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ dreht Vektor um Winkel ϕ

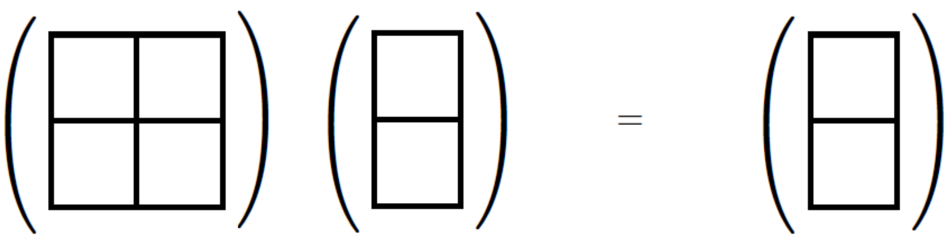


$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{w} = D_\phi\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\ \cos(\phi) \\ v\ \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

Matrix A bildet Vektor B auf Vektor C ab.



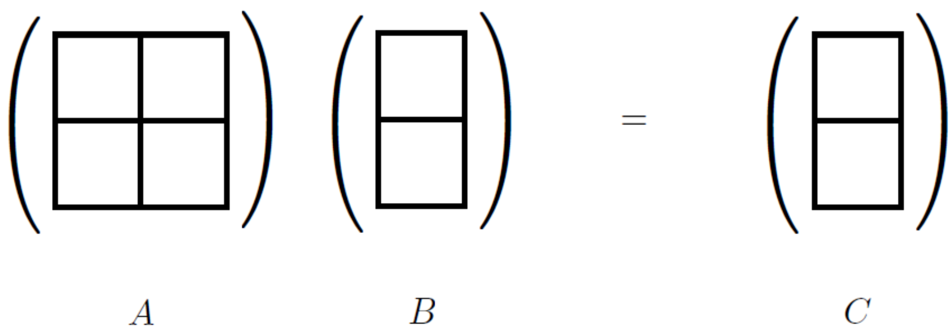
A B C

„Man steckt einen Vektor rein, die Matrix spuckt einen anderen Vektor aus.“

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: Abbildung von Vektoren auf Vektoren

Matrix A bildet Vektor B auf Vektor C ab.



„Man steckt einen Vektor rein, die Matrix spuckt einen anderen Vektor aus."

Ist es wirklich immer ein anderer Vektor?

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Eigenvektor einer quadratischen Matrix:

$$M\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \quad \text{mit Zahl } \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda\text{: Eigenwert}$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$