TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 5: Eigenwerte, Eigenvektoren und Basiswechsel

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

November 23, 2020

§ 3. Rechnen mit Indizes -- Matrizen und Tensoren

Letze Vorlesung:

- Determinante
- Kronecker-Delta und Levi-Civita-Tensor
- Matrix als Abbildung: Drehmatrix
- Eigenwerte und Eigenvektoren

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Eigenvektor einer quadratischen Matrix:

$$M\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \quad \text{mit Zahl } \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda\text{: Eigenwert}$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Berechnung der Eigenwerte:

$$M\,\vec{v} - \lambda\,\vec{v} = (M - \lambda\,\mathbb{1}_{n\times n})\;\vec{v} = 0$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Berechnung der Eigenwerte:

$$M\,\vec{v} - \lambda\,\vec{v} = \underline{(M - \lambda\,\mathbb{1}_{n\times n})}\;\vec{v} = 0$$

$$\text{Det}\,(M - \lambda\,\mathbb{1}_{n\times n}) = 0$$

- Die linke Seite: charakteristisches Polynom (Grad n in λ)
- Jede Lösung λ der Gleichung ist ein Eigenwert der Matrix M zu einem Eigenvektor.
- Bei einer $(n \times n)$-Matrix gibt es im Allgemeinen n Eigenwerte.

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte?

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Berechnung der Eigenvektoren:

$$M\,\vec{v} - \lambda\,\vec{v} = \underline{(M - \lambda\,\mathbb{1}_{n\times n})\ \vec{v} = 0}$$

➢ Jeder Eigenwert λ hat einen entsprechenden Eigenvektor $\vec{v}$.

➢ Wenn wir diese Gleichung in Komponenten schreiben, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem für die Komponenten des Vektors.

➢ Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen:

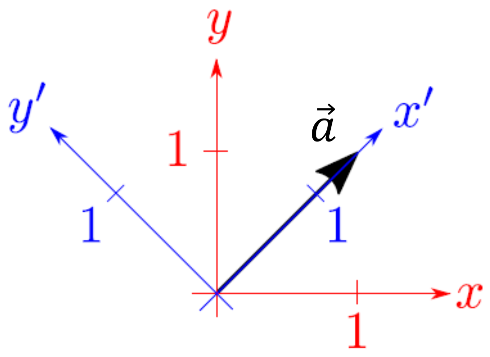
$$M\,\vec{v} = \lambda\,\vec{v} \quad \Rightarrow \quad M\,(\alpha\,\vec{v}) = \alpha\,M\,\vec{v} = \alpha\,\lambda\,\vec{v} = \lambda\,(\alpha\,\vec{v})$$

§ 3.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren?

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:

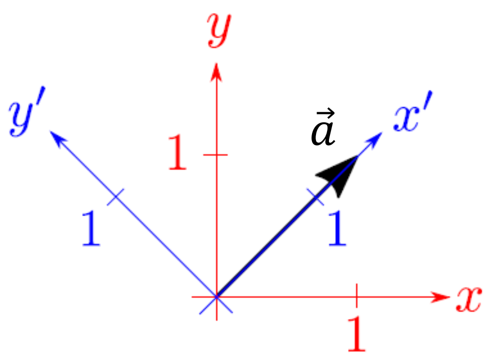


Koordinatensystem K: $\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatensystem K': $\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



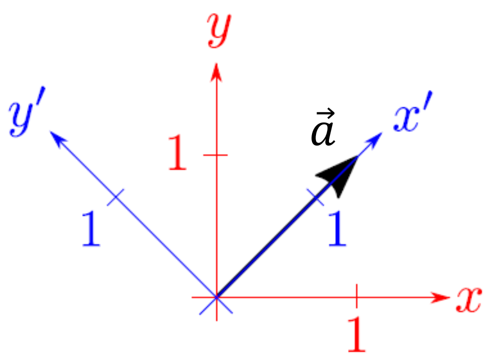
$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Drehung von Koordinatenachsen: als ob alle Vektoren in andere Richtung drehen!

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

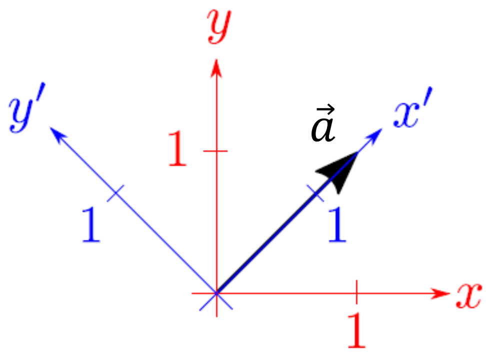
Drehung von Koordinatenachsen: als ob alle Vektoren in andere Richtung drehen!

Drehung in **andere** Richting!

$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = D_{-\pi/4}\,\vec{a}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

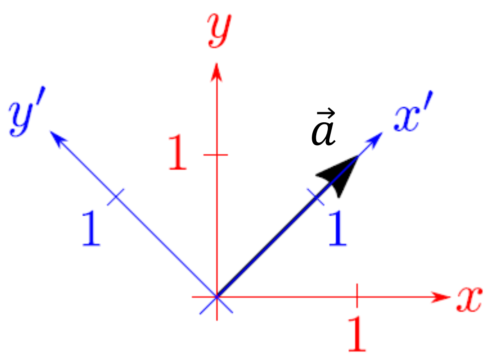
$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bei Vektoren:

- Der Vektor bleibt unverändert.
- Die Darstellung (Zahlen in Spalte) hängt vom Koordinatensystem ab.

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

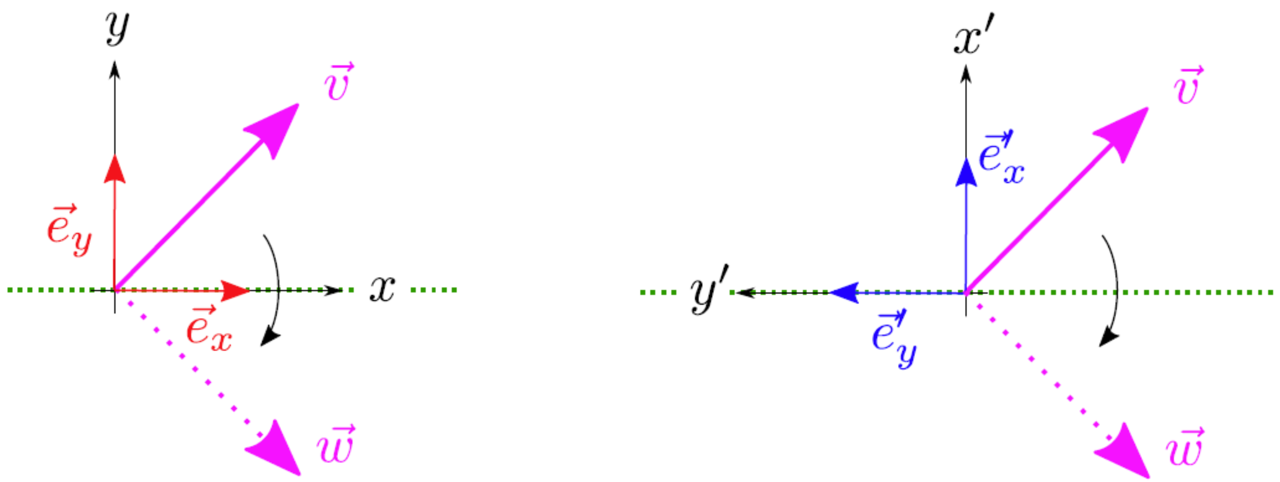
$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bei Abbildungen:

- Die Abbildung bleibt unverändert.
- Die Darstellung (Zahlen in Matrix) hängt vom Koordinatensystem ab.

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

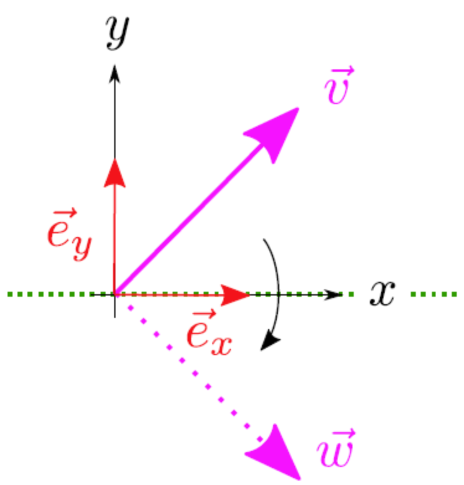
Beispiel: Spiegelung an der horizontalen Achse

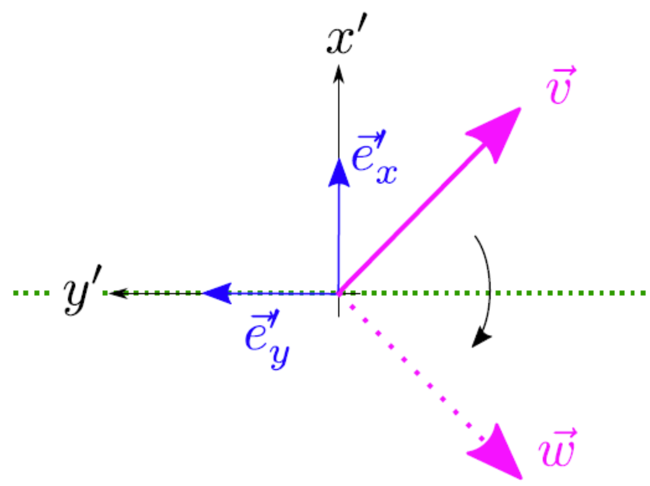


Wie lauten die Darstellungen der Spiegelung in den Koordinatensystemen K und K'?

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Beispiel: Spiegelung an der horizontalen Achse





$$\vec{v}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

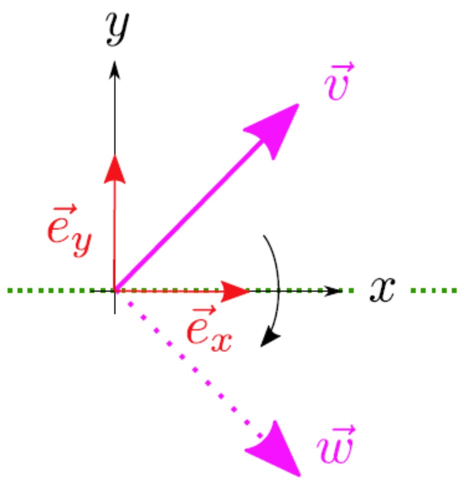
$$\vec{w}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

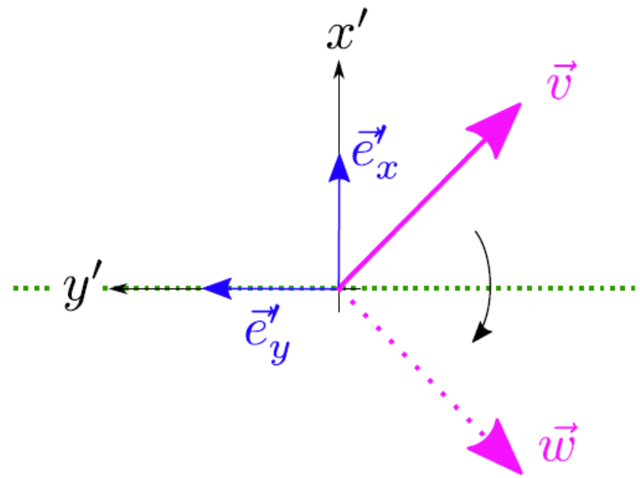
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y-Komponente ändert Vorzeichen

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Beispiel: Spiegelung an der horizontalen Achse





$$\vec{v}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{K'} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

x'-Komponente ändert Vorzeichen

$$\vec{w}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

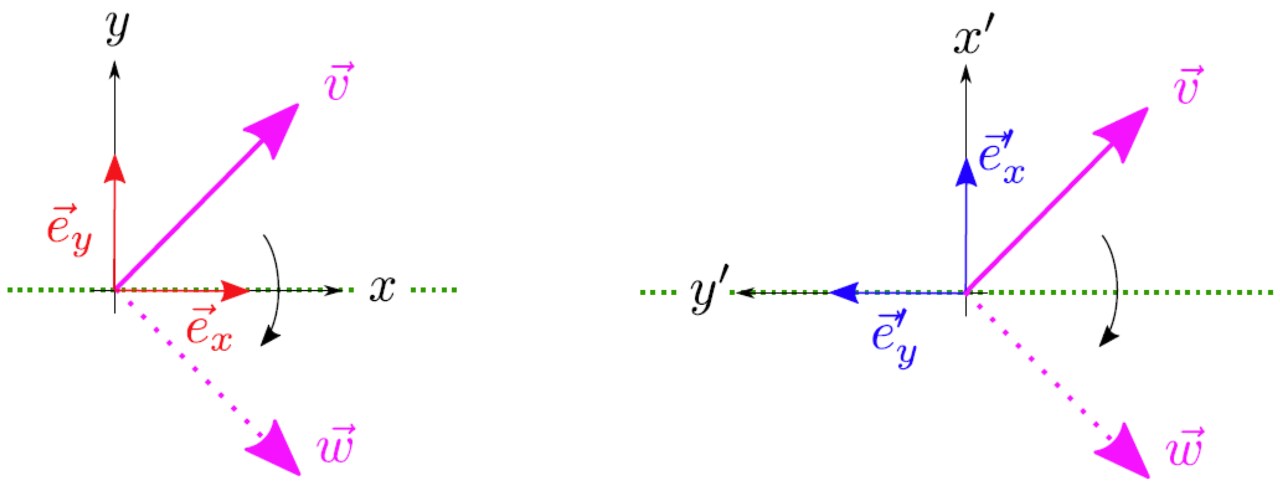
$$\vec{w}_{K'} = \begin{pmatrix} -v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M' \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Beispiel: Spiegelung an der horizontalen Achse

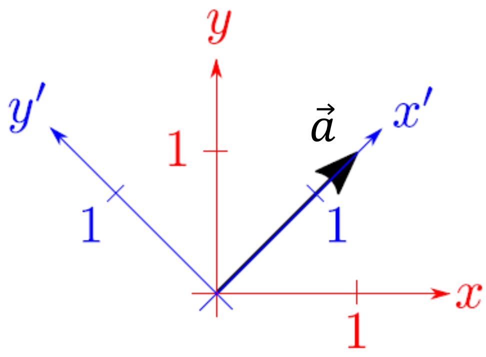


$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ➢ Die Abbildung bleibt unverändert.
- ➢ Die Darstellung (Zahlen in Matrix) hängt vom Koordinatensystem ab.

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Wechsel der Basisvektoren:



Im Koordinatensystem K:
Basisvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

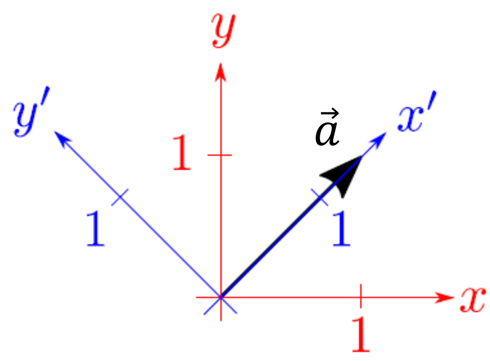
Im Koordinatensystem K':
Basisvektoren $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y\}$

Drehung um einen Winkel $\phi = \pi/4$:

$$D_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Wechsel der Basisvektoren:



Im Koordinatensystem K:
Basisvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

Im Koordinatensystem K':
Basisvektoren $\{\vec{e}_x', \vec{e}_y'\}$

$\vec{e}_x{}'$ hat in alter Basis die Darstellung $\vec{e}_x{}' = D_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\vec{e}_y{}'$ hat in alter Basis die Darstellung $\vec{e}_y{}' = D_{\pi/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Basiswechsel im $\mathbb{R}^n$:

Orthonormalbasis $B = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \ldots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Basiswechsel im $\mathbb{R}^n$:

Orthonormalbasis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad \dots \qquad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$:

$$\vec{e}_i{}' = U\,\vec{e}_i \qquad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}_1', \ldots, \vec{e}_n'\}$:

$$\vec{e}_i{}' = U\,\vec{e}_i \qquad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \ldots, n$$

$$\begin{pmatrix} e'_{i,1} \\ e'_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$:

$\vec{e}_i\,' = U\,\vec{e}_i$ für alle Basisvektoren $i = 1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} e'_{i,1} \\ e'_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad e_{i,j} = \delta_{ij}$$

$e'_{i,j}$: j-te Komponente der Darstellung von $\vec{e}_i'$ in der alten Basis B

$e_{i,j}$: j-te Komponente der Darstellung von $\vec{e}_i$ in der alten Basis B

$$e'_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} U_{j,l}\, e_{i,l} = U_{j,i}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$:

$\vec{e}_i{}' = U\, \vec{e}_i$ für alle Basisvektoren $i = 1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} e'_{i,1} \\ e'_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad e_{i,j} = \delta_{ij}$$

Was ist die Matrix U? $U = \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \dots & \vec{e}_n{}' \end{pmatrix}$

Darstellungen der neuen Basisvektoren $\vec{e}_i'$ in der alten Basis

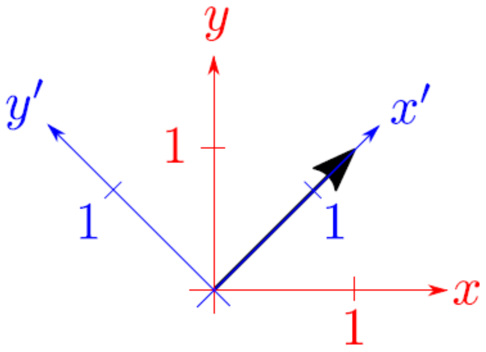
§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$:

$$\vec{e}_i{}' = U\,\vec{e}_i \qquad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

Was ist die Matrix U? $\qquad U = \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \dots & \vec{e}_n{}' \end{pmatrix}$

Beispiel:



$$U = \begin{pmatrix} \vec{e}_x{}' & \vec{e}_y{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}_1', \dots, \vec{e}_n'\}$:

$$\vec{e}_i{}' = U\,\vec{e}_i \qquad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

Was ist die Matrix U? $\qquad U = \begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \dots & \vec{e}_n{}' \end{pmatrix}$

- Die Matrix U ist die sogenannte orthogonale Matrix und erfüllt

$$U^T = U^{-1}$$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Allgemeine Vektoren unter Basiswechsel:

In der alten Basis: $\vec{v} = \sum_j v_j \, \vec{e}_j \quad \rightarrow \quad v_j = \vec{v} \cdot \vec{e}_j$

In der neuen Basis: $\vec{v} = \sum_i v'_i \, \vec{e}_i{}' \quad \rightarrow \quad v'_i = \vec{v} \cdot \vec{e}_i{}'$

§ 3.8 Basiswechsel und Vektoren

- Allgemeine Vektoren unter Basiswechsel:

In der alten Basis: $\vec{v} = \sum_j v_j \, \vec{e}_j \quad \rightarrow \quad v_j = \vec{v} \cdot \vec{e}_j$

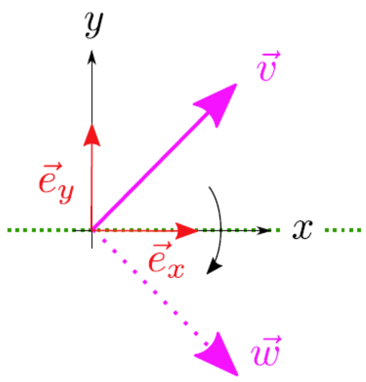
In der neuen Basis: $\vec{v} = \sum_i v_i' \, \vec{e}_i{}' \quad \rightarrow \quad v_i' = \vec{v} \cdot \vec{e}_i{}'$

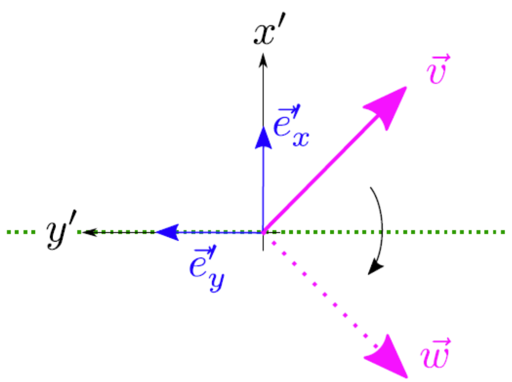
$$\Rightarrow \quad v_i' = \sum_j v_j \, U_{ji} = \sum_j v_j \, \left(U^T\right)_{ij} = \sum_j \left(U^T\right)_{ij} \, v_j$$

$\vec{v}' = U^T \, \vec{v}$ bzw. $\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ \vdots \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

§ 3.9 Basisabhängigkeit der Darstellung von linearen Abbildungen als Matrizen

- Die Darstellung der Abbildung, also die Zahlen in der Matrix, hängen von der gewählten Basis ab.





$$\vec{v}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{K'} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_{K'} = \begin{pmatrix} -v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M' \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 3.9 Basisabhängigkeit der Darstellung von linearen Abbildungen als Matrizen

- Die Darstellung der Abbildung, also die Zahlen in der Matrix, hängen von der gewählten Basis ab.

In der alten Basis: $\vec{w} = M\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_j = \sum_k M_{jk}\, v_k$$

§ 3.9 Basisabhängigkeit der Darstellung von linearen Abbildungen als Matrizen

- Die Darstellung der Abbildung, also die Zahlen in der Matrix, hängen von der gewählten Basis ab.

In der alten Basis: $\vec{w} = M\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_j = \sum_k M_{jk}\, v_k$$

In der neuen Basis: $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$w'_i = \sum_j \left(U^T\right)_{ij} w_j = \sum_{j,k} \left(U^T\right)_{ij} M_{jk}\, v_k = \sum_{j,k,l} \left(U^T\right)_{ij} M_{jk}\, U_{kl}\, v'_l$$

§ 3.9 Basisabhängigkeit der Darstellung von linearen Abbildungen als Matrizen

- Die Darstellung der Abbildung, also die Zahlen in der Matrix, hängen von der gewählten Basis ab.

In der alten Basis: $\vec{w} = M\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad w_j = \sum_k M_{jk}\, v_k$$

In der neuen Basis: $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$w'_i = \sum_l M'_{il}\, v'_l \qquad M' = U^T M\, U$$

$$w'_i = \sum_j \left(U^T\right)_{ij} w_j = \sum_{j,k} \left(U^T\right)_{ij} M_{jk}\, v_k = \sum_{j,k,l} \underline{\left(U^T\right)_{ij} M_{jk}\, U_{kl}}\, v'_l$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Gibt es ein Koordinatensystem, in dem eine gegebene Abbildung besonders einfach ist?

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Gibt es ein Koordinatensystem, in dem eine gegebene Abbildung besonders einfach ist?

  ➢ Diagonalmatrizen sind die einfachsten.

$$M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M'_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & M'_{nn} \end{pmatrix}$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Gibt es ein Koordinatensystem, in dem eine gegebene Abbildung besonders einfach ist?

➢ Diagonalmatrizen sind die einfachsten.

$$M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M'_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & M'_{nn} \end{pmatrix}$$

➢ Wenn es so ein Koordinatensystem gibt, nennen wir M diagonalisierbar.

➢ Nicht immer, aber oft, gibt es solch ein Koordinatensystem.

(z.B. für reelle symmetrische Matrizen)

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Gibt es ein Koordinatensystem, in dem eine gegebene Abbildung besonders einfach ist?

  - Diagonalmatrizen sind die einfachsten.

$$M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M'_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & M'_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Dies könnte durch Diagonalisierung der Matrix erreicht werden.

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Beispiel: reelle symmetrische Matrix

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Beispiel: reelle symmetrische Matrix

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

$$M\, \vec{v}_i = \lambda_i\, \vec{v}_i$$

λ_i: Eigenwerte

$\vec{v}_i$: normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Beispiel: reelle symmetrische Matrix

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

$$M\, \vec{v}_i = \lambda_i\, \vec{v}_i$$

λ_i: Eigenwerte

$\vec{v}_i$: normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

$\Rightarrow$

$$U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Diagonalisierung?