SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 6: Differentialrechnung

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

November 30, 2020

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Gibt es ein Koordinatensystem, in dem eine gegebene Abbildung besonders einfach ist?

➢ Diagonalmatrizen sind die einfachsten.

$$M' = \begin{pmatrix} M'_{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & M'_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & M'_{nn} \end{pmatrix}$$

➢ Dies könnte durch Diagonalisierung der Matrix erreicht werden.

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Beispiel: reelle symmetrische Matrix

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

$$M\, \vec{v}_i = \lambda_i\, \vec{v}_i$$

λ_i: Eigenwerte

$\vec{v}_i$: normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

$\Rightarrow$

$$U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Beispiel: reelle symmetrische Matrix

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

$$M\, \vec{v}_i = \lambda_i\, \vec{v}_i$$

λ_i: Eigenwerte

$\vec{v}_i$: normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

$\Rightarrow$

$$U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^T \qquad M' = U^T M U$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Beispiel: reelle symmetrische Matrix

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

$$M\,\vec{v}_i = \lambda_i\,\vec{v}_i$$

λ_i: Eigenwerte

$\vec{v}_i$: Eigenvektoren

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \dots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

- Reelle diagonalisierbare Matrix:

$$M' = U^{-1}\, M\, U$$

Ähnlichkeitstransformation

$$M\, \vec{v}_i = \lambda_i\, \vec{v}_i$$

λ_i: Eigenwerte

$\vec{v}_i$: Rechtseigenvektoren

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_n \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

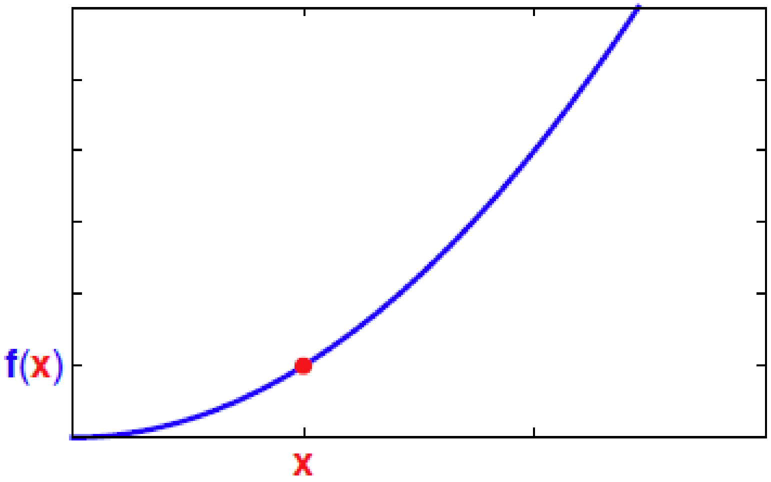
Im Allgemeinen: $U^{-1} \neq U^T$

§ 3.10 Diagonalisierung von Matrizen

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Ähnlichkeitstransformation?

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

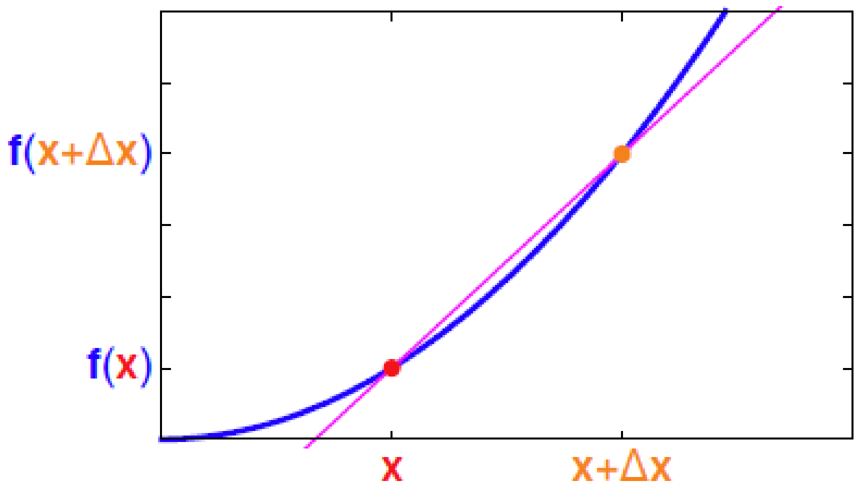


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

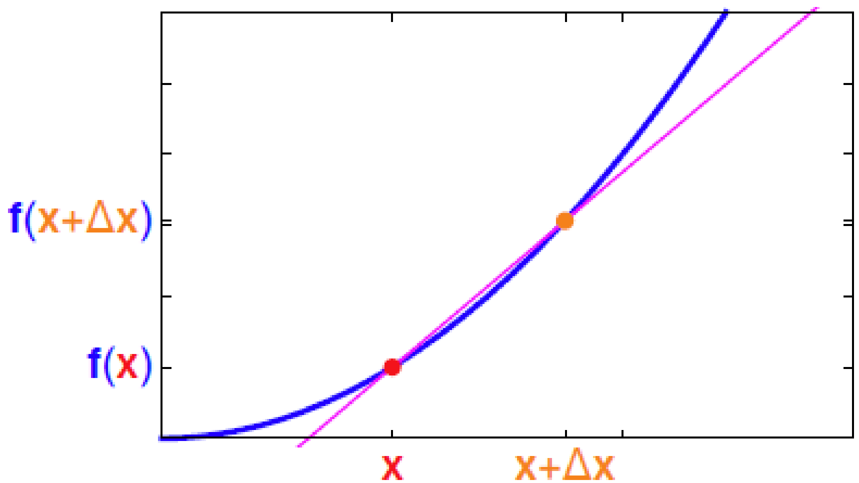


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

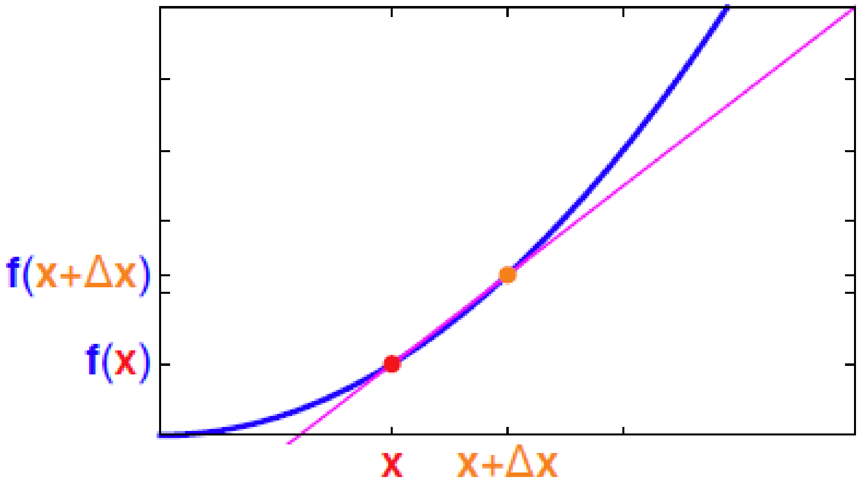


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

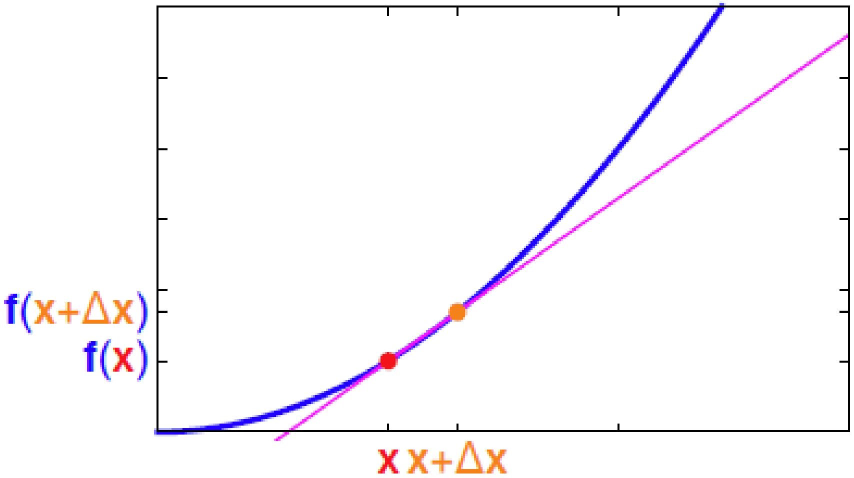


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

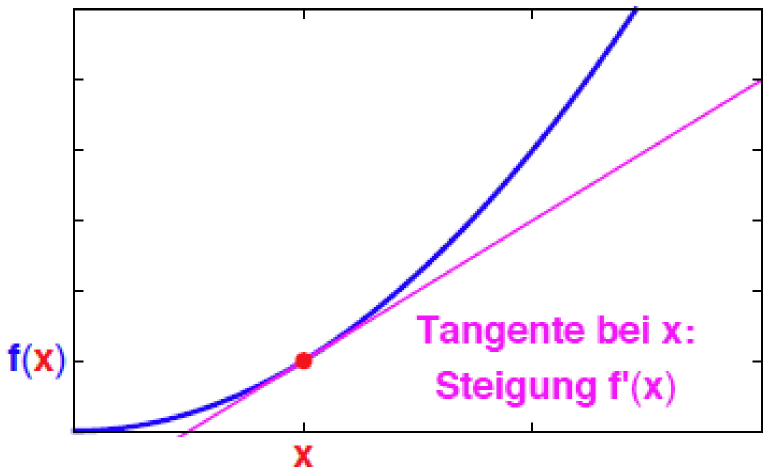


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

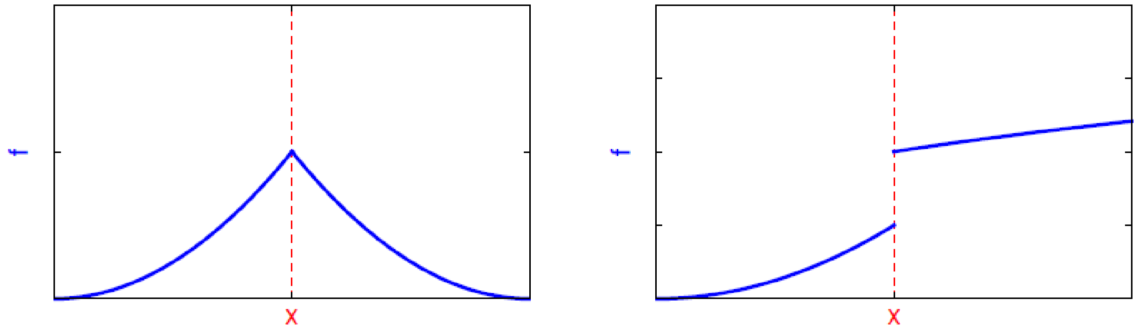


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

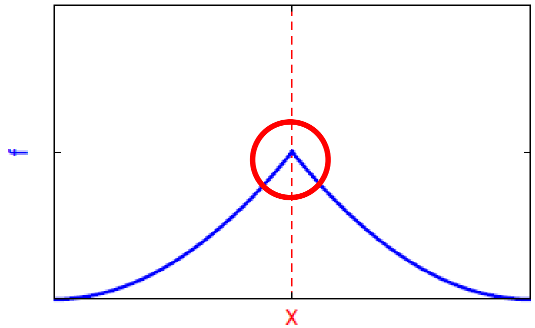
§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Wenn Ableitung (Grenzwert) nicht wohl-definiert: Funktion dort nicht differenzierbar

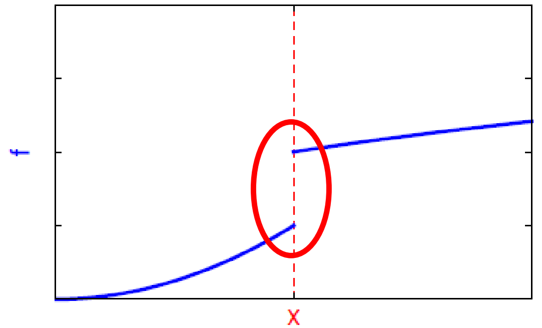


§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Wenn Ableitung (Grenzwert) nicht wohl-definiert: Funktion dort nicht differenzierbar



Knicke



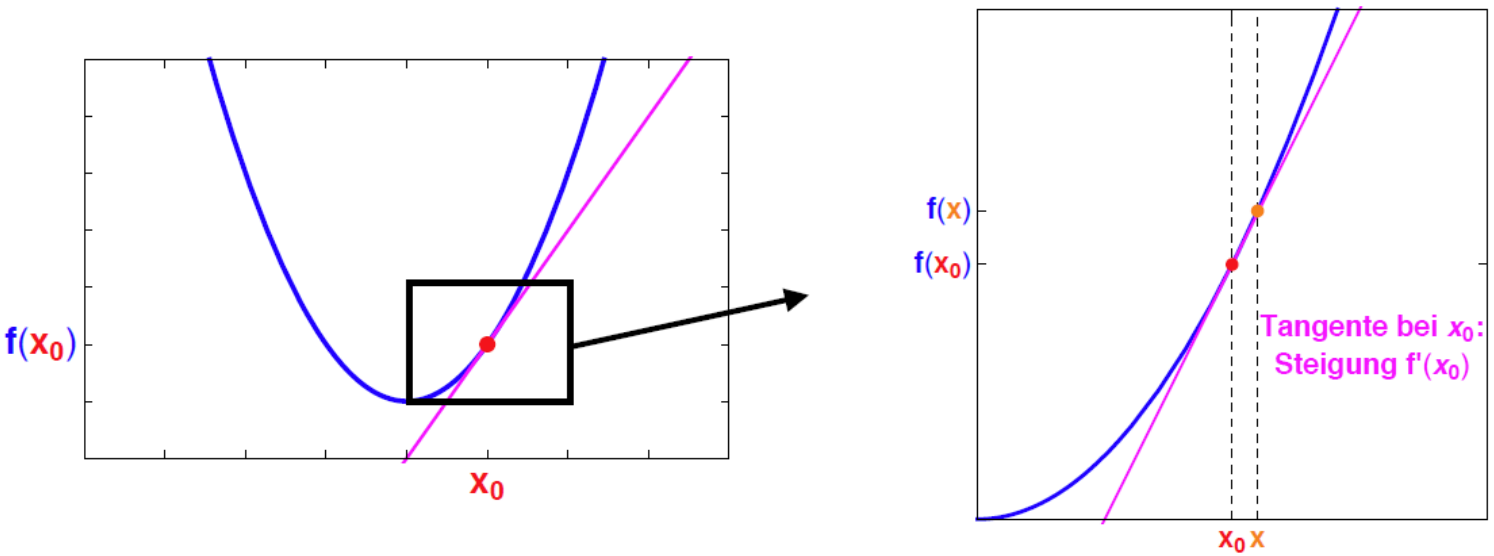
Sprünge (Funktion unstetig)

➢ Die Funktionen sind bei x nicht differenzierbar.

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert

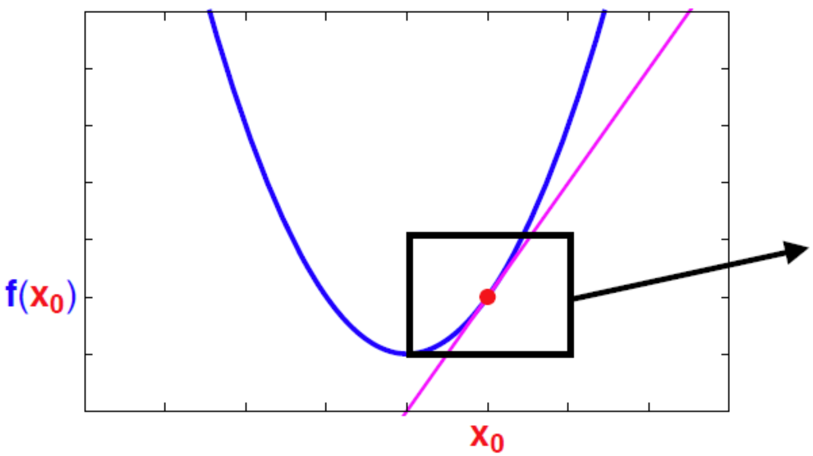


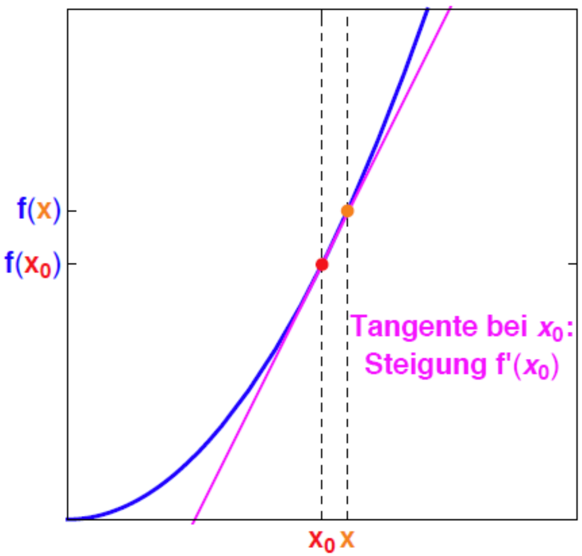
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$$

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert





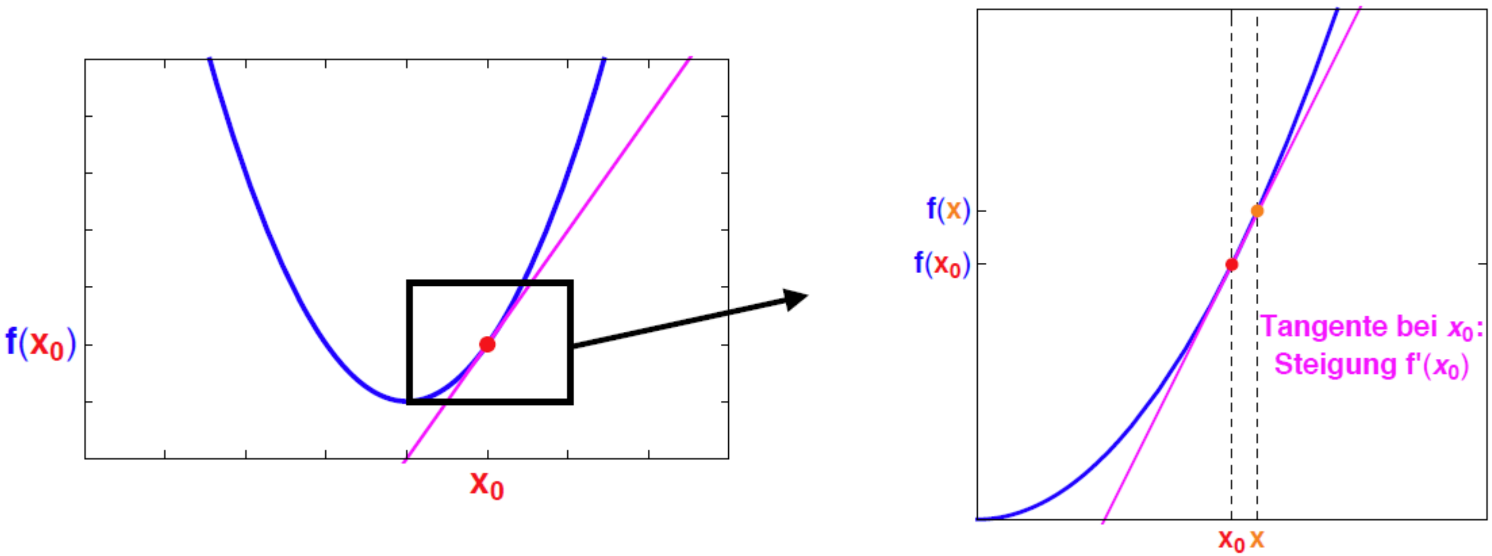
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$$

Differential $\mathrm{d}f$: infinitesimale Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von x

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert



Differential $\mathrm{d}f$: infinitesimale Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von x

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Höhere Ableitungen: Ableitungen von Ableitungen

Zweite Ableitung: $$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

n-te Ableitung: $$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

§ 4.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Höhere Ableitungen: Ableitungen von Ableitungen

Zweite Ableitung: $$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

n-te Ableitung: $$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

- Ableitungen nach der Zeit t:

Abkürzung: Punkt über Funktion = Zeitableitung $$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$$

§ 4.2 Ableitungsregeln

- Ableitungen einiger wichtiger Funktionen:

Polynome und Potenzen: $$\frac{d}{dx}\, x^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha-1} \;(\alpha \in \mathbb{R})$$

Exponentialfunktion: $$\frac{d}{dx}\, e^{x} = e^{x}$$

Natürlicher Logarithmus: $$\frac{d}{dx}\, \ln(x) = \frac{1}{x}$$

Sinus: $$\frac{d}{dx}\, \sin(x) = \cos(x)$$

Kosinus: $$\frac{d}{dx}\, \cos(x) = -\sin(x)$$

…

§ 4.2 Ableitungsregeln

- Beim Ableiten gelten folgende wichtige Regeln:
  - Ableitungen sind linear:
  - Produktregel:
  - Quotientenregel:

§ 4.2 Ableitungsregeln

- Beim Ableiten gelten folgende wichtige Regeln:

  - Ableitungen sind linear:

$$\frac{d}{dx}\,(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)) = \alpha\,\frac{df(x)}{dx} + \beta\,\frac{dg(x)}{dx} \qquad (\alpha,\ \beta\ \text{Zahlen})$$

  - Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\,(f(x)\,g(x)) = g(x)\,\frac{df(x)}{dx} + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}$$

  - Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\,\frac{df(x)}{dx} - f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2} = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)\,g'(x)}{g(x)^2}$$

§ 4.2 Ableitungsregeln

- Beim Ableiten gelten folgende wichtige Regeln:
  - Kettenregel:
  - Ableitung der Umkehrfunktion:

§ 4.2 Ableitungsregeln

- Beim Ableiten gelten folgende wichtige Regeln:
  - Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}$$

  - Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \left.\frac{1}{\frac{df(y)}{dy}}\right|_{y=f^{-1}(x)}$$

§ 4.2 Ableitungsregeln

Regel von l'Hôpital: zur Berechnung von „pathologischen" Grenzwerten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (falls dieser Grenzwert exisitert)

§ 4.2 Ableitungsregeln

Regel von l'Hôpital: zur Berechnung von „pathologischen" Grenzwerten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (falls dieser Grenzwert exisitert)

Beispiel: $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

§ 4.2 Ableitungsregeln

Regel von l’Hôpital: zur Berechnung von „pathologischen“ Grenzwerten

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (falls dieser Grenzwert exisitert)

Beispiel: $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = ?$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \qquad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

Beispiel: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

- Gradient der Funktion f: Vektor aller partiellen Ableitungen

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

- Gradient der Funktion f: Vektor aller partiellen Ableitungen

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$

(Vektor der ersten partiellen Ableitungen)

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen fasst man in der Hesse-Matrix zusammen:

$$H_f(\vec{x})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen fasst man in der Hesse-Matrix zusammen:

$$H_f(\vec{x})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$$

- Laplace-Operator:

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Im Allgemeinen vertauschen die zweiten Ableitungen NICHT:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \neq \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Im Allgemeinen vertauschen die zweiten Ableitungen NICHT:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \neq \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Satz von Schwarz: Ableitungen vertauschen bei „netten" Funktionen

Funktion f ist k mal stetig differenzierbar $\Rightarrow$ Alle l-ten Ableitungen mit $l \leq k$ vertauschbar!