TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 7: Differenzialrechnung

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

Dezember 7, 2020

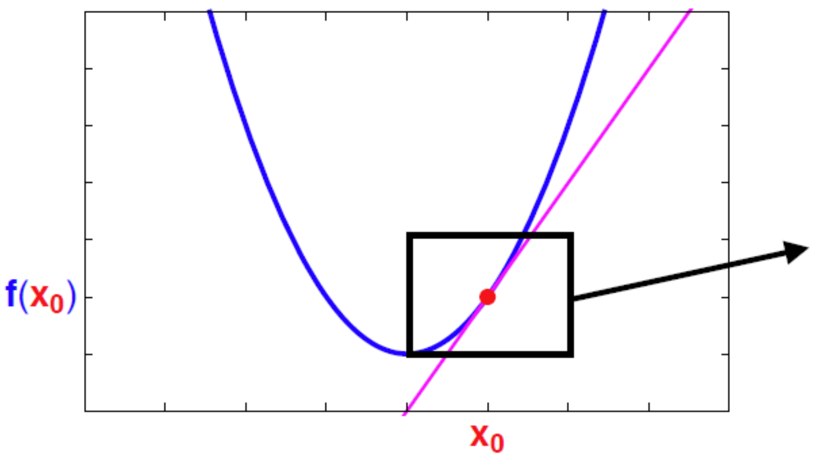
§ 4. Differentialrechnung

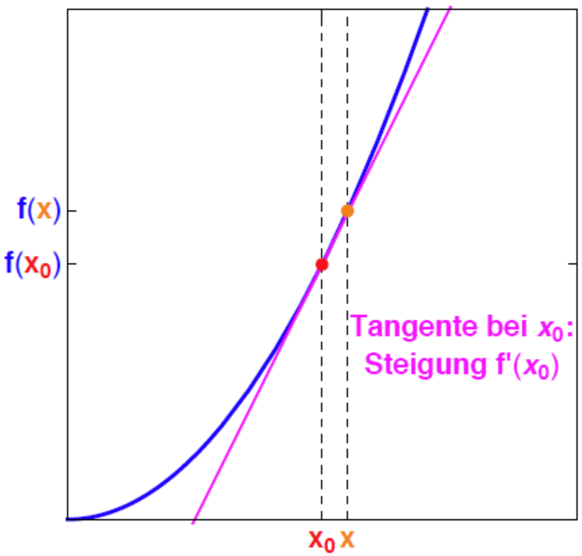
Letze Vorlesung:

- Ableitung: Grundbegriff
- Ableitungen einiger wichtiger Funktionen und Ableitungsregeln
- Partielle Ableitungen von Skalaren Funktionen mehrerer Variablen

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert





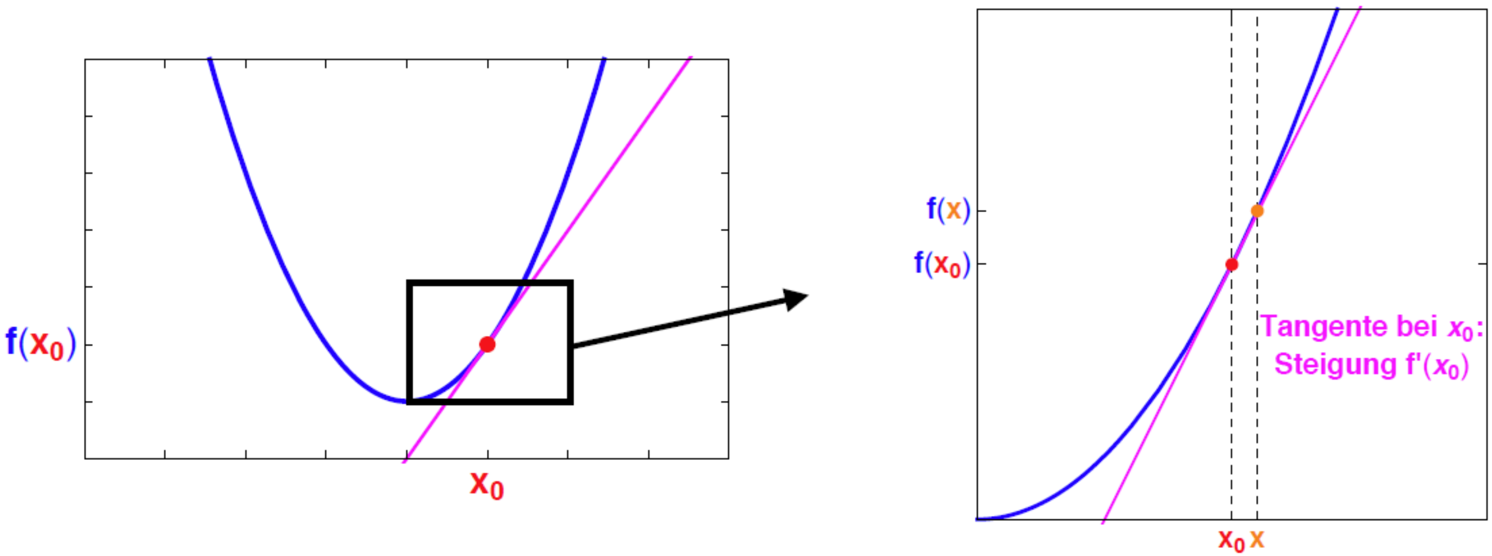
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$$

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert



Bei Funktionen mehrerer Variablen: totales Differential

$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{df(x)}{dx}\,dx \quad \Rightarrow \quad df(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\,dx_i = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Totales Differential:

$$df(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\, dx_i = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\, dx_2 + \dots$$

Beispiel: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Rechenregeln für totale und partielle Ableitungen:

  - Die Ableitungsregeln verallgemeinern sich auch direkt von den Funktionen einer Variablen auf die Funktionen mehrerer Variablen.

  - Man muss die Kettenregel für jede der Variablen durchführen.

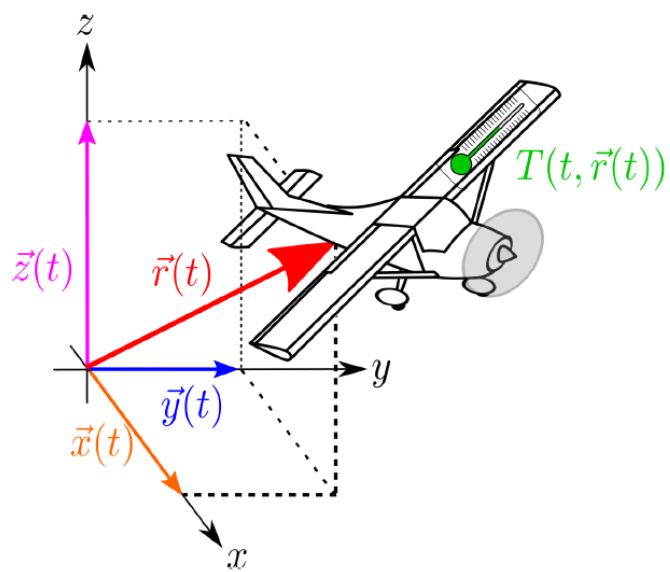
§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Rechenregeln für totale und partielle Ableitungen:
  - ➢ Die Ableitungsregeln verallgemeinern sich auch direkt von den Funktionen einer Variablen auf die Funktionen mehrerer Variablen.
  - ➢ Man muss die Kettenregel für jede der Variablen durchführen.

Beispiel: $$\frac{dh(f(x),g(x))}{dx} = \frac{\partial h(f,g)}{\partial f}\frac{df(x)}{dx} + \frac{\partial h(f,g)}{\partial g}\frac{dg(x)}{dx}$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel:

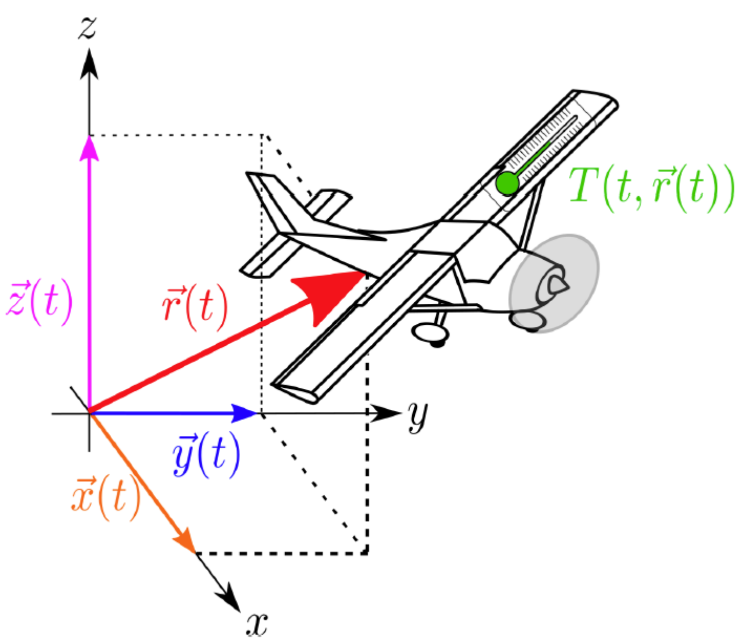


Temperatur $T = T(\vec{r}(t), t) = T(x(t), y(t), z(t), t)$

$$\frac{\mathrm{d}T(\vec{r}(t), t)}{\mathrm{d}t} = ?$$

§ 4.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel:



$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{dT(\vec{r}(t),t)}{dt}}_{\text{total Ableitung nach der Zeit}} &= \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial x}}_{\text{Ableitung nach } x} \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\text{totale Zeitableitung von } x} \\
&+ \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial y}}_{\text{Ableitung nach } y} \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{\text{totale Zeitableitung von } y} \\
&+ \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial z}}_{\text{Ableitung nach } z} \underbrace{\frac{dz(t)}{dt}}_{\text{totale Zeitableitung von } z} \\
&+ \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial t}}_{\text{partielle Ableitung nach der Zeit}}
\end{aligned}$$

§ 4.4 Ableitungen von vektorwertigen Funktionen

- Bei vektorwertigen Funktionen: partielle Ableitung passiert komponentenweise

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{m} f_j(\vec{x})\, \vec{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_i}\, \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

§ 4.4 Ableitungen von vektorwertigen Funktionen

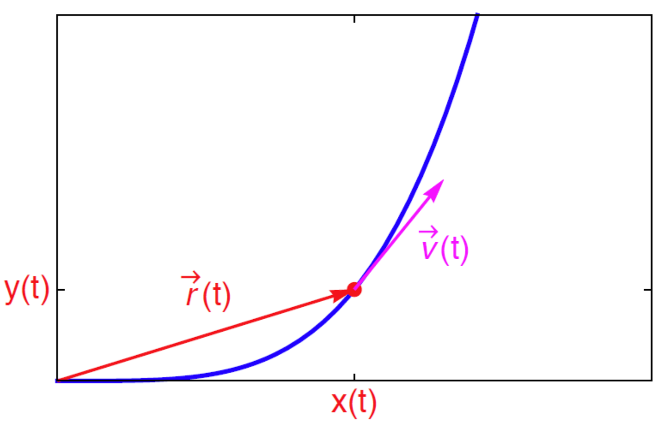
- Bei vektorwertigen Funktionen: partielle Ableitung passiert komponentenweise

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{m} f_j(\vec{x})\,\vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_i}\,\vec{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x})}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

Beispiel: Raumkurven

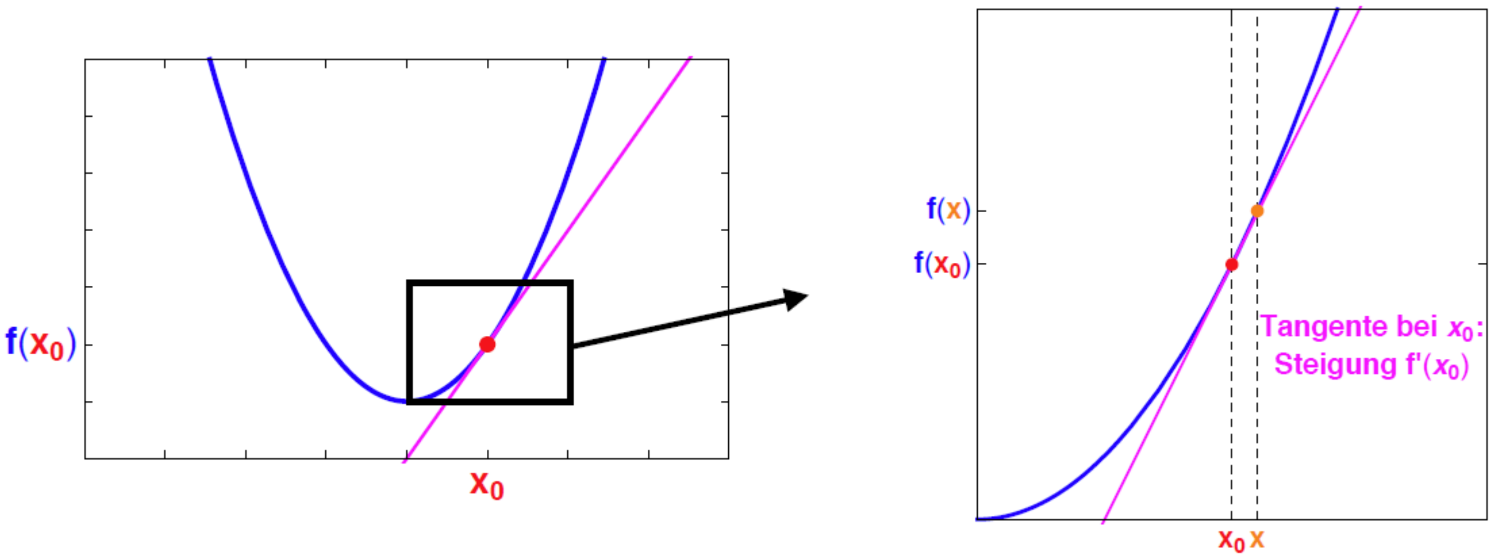
Orts: $\vec{r}(t)$

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$



§ 4.5 Taylorreihe

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert



$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$$

§ 4.5 Taylorreihe

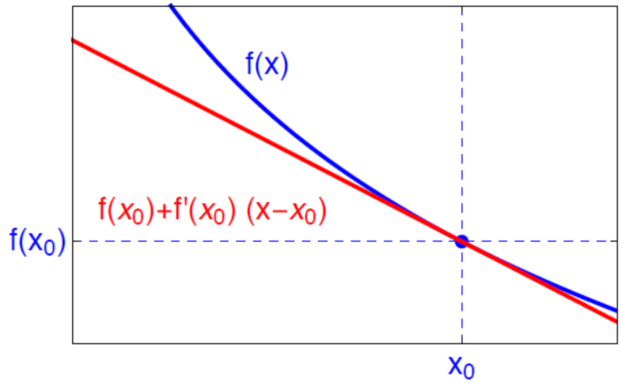
- Wie können wir die Annäherung systematisch verbessern?

$\Rightarrow$ Taylorreihe

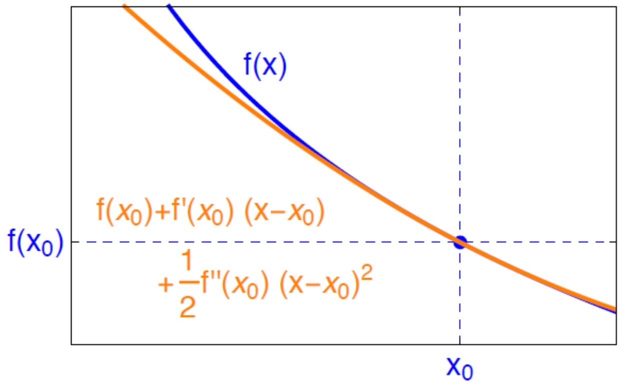
§ 4.5 Taylorreihe

- Wie können wir die Annäherung systematisch verbessern?

  ⇒ Taylorreihe



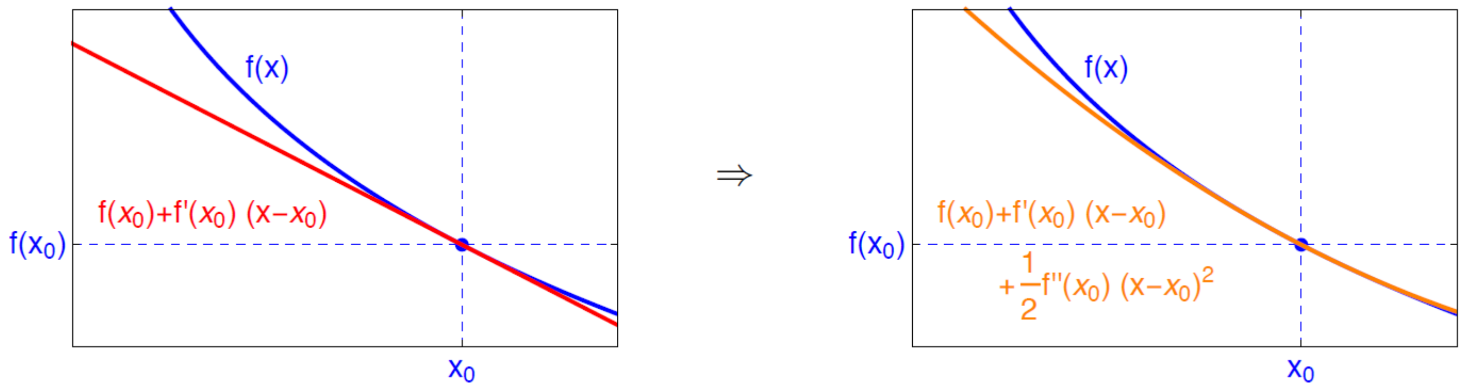
$\Rightarrow$



§ 4.5 Taylorreihe

- Wie können wir die Annäherung systematisch verbessern?

Taylorreihe



$$T f(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots$$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$Tf(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots$$

  - Die Reihe $Tf(x, x_0)$ konvergiert nicht immer.
  - Selbst wenn $Tf(x, x_0)$ konvergiert, muss der Grenzwert nicht automatisch gleich $f(x)$ sein.

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$Tf(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots$$

  - Die Reihe $Tf(x, x_0)$ konvergiert nicht immer.
  - Selbst wenn $Tf(x, x_0)$ konvergiert, muss der Grenzwert nicht automatisch gleich $f(x)$ sein.

- Trotzdem gilt $Tf(x, x_0) = f(x)$ in so vielen Fällen (insbesondere in der Physik). Dies ergibt eine systematische Annäherung der Funktionen.

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$
\begin{aligned}
Tf(x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel: Taylorreihe von $f(x) = e^x$ um $x = 0$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$
\begin{aligned}
Tf(x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel: Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ um $x = 0$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihen einiger wichtiger Funktionen um $x = 0$:

Exponentialfunktion: $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$$

Natürlicher Logarithmus: $$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Sinus: $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \ldots$$

Kosinus: $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$Tf(x_0 + \delta x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\, \delta x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\Big|_{x=x_0}$$

$$= e^{\delta x \frac{d}{dx}} f\Big|_{x=x_0}$$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

$$
\begin{aligned}
Tf(x_0+\delta x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\, \delta x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \delta x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\Big|_{x=x_0} \\
&= e^{\delta x \frac{d}{dx}} f\Big|_{x=x_0}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
Tf(\vec{x}_0+\delta\vec{x}, \vec{x}_0) &= e^{\delta\vec{x}\cdot\nabla} f\Big|_{\vec{x},\vec{x}_0} \\
&= f(\vec{x}_0) + \delta\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\delta\vec{x}\cdot\nabla)\,(\delta\vec{x}\cdot\nabla)\, f(\vec{x}_0) + \ldots
\end{aligned}
$$

Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

$$
\begin{aligned}
Tf(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}, \vec{x}_0) &= e^{\delta\vec{x}\cdot\nabla} f\Big|_{\vec{x},\vec{x}_0} \\
&= f(\vec{x}_0) + \delta\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right)\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right) f(\vec{x}_0) + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel: Funktion von zwei Variablen $T(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}, \vec{y}_0 + \delta\vec{y}, x_0, y_0)$

§ 4.5 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

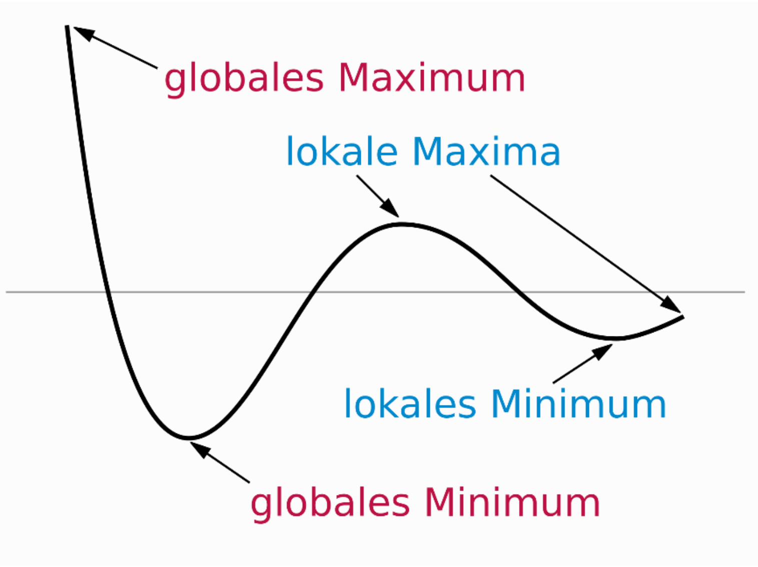
$$
\begin{aligned}
Tf(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}, \vec{x}_0) &= e^{\delta\vec{x}\cdot\nabla}\, f\Big|_{\vec{x},\vec{x}_0} \\
&= f(\vec{x}_0) + \delta\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right)\,\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right)\, f(\vec{x}_0) + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel: Funktion von zwei Variablen (Satz von Schwarz verwendet!)

$$
\begin{aligned}
Tf(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, x_0, y_0) \approx\; & f(x_0, y_0) + \delta x\,\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\
& + \frac{\delta x^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \delta x\delta y\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y} + \frac{\delta y^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:



von Wikipedia „Extremwert“

Minima und Maxima der Funktion $f(x) = \frac{\cos(3\pi x)}{x}$ im Bereich $0.1 \leq \ x \ \leq 1.1$

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} > 0$$ Funktion steigt bei x an

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0$$ Funktion ist bei x flach

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} < 0$$ Funktion fällt bei x ab

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} > 0$	Funktion steigt bei x an
$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0$	Funktion ist bei x flach
$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} < 0$	Funktion fällt bei x ab

- Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extrempunkts (Maximum oder Minimum):

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0.$$

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

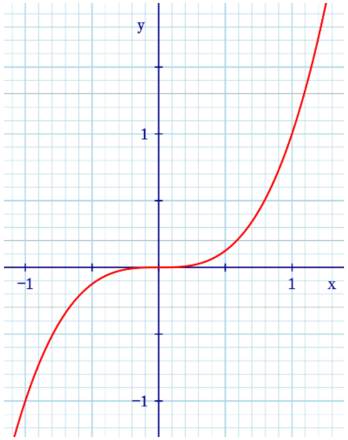
Beispiel: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

Beispiel: $f(x) = x^3$



von Wikipedia „Sattelpunkt“

§ 4.6 Ableitungen zur Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

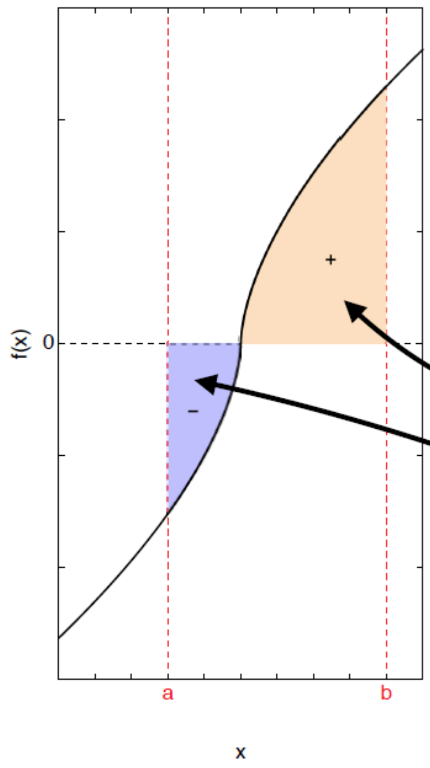
$$\Downarrow$$

$$\nabla f(\vec{x}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_f(\vec{x}_0) \text{ hat nur negative Eigenwerte} & \text{Lokales Maximum} \\ \underline{H_f(\vec{x}_0)} \text{ hat nur positive Eigenwerte} & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

Hesse-Matrix $\quad H_f(\vec{x})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$

§ 5. Integralrechnung

- Integral als Fläche:



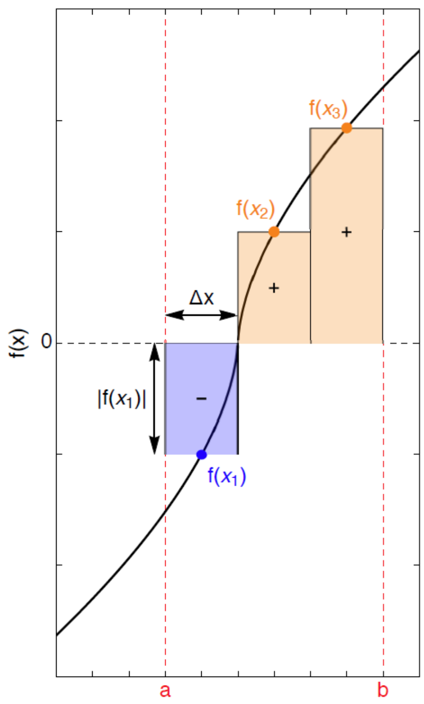
Integral $\int_a^b dx\, f(x)$:

Flächeninhalt unter Kurve mit

- Anteil über x-Achse: zählt positiv
- Anteil unter x-Achse: zählt negativ

§ 5. Integralrechnung

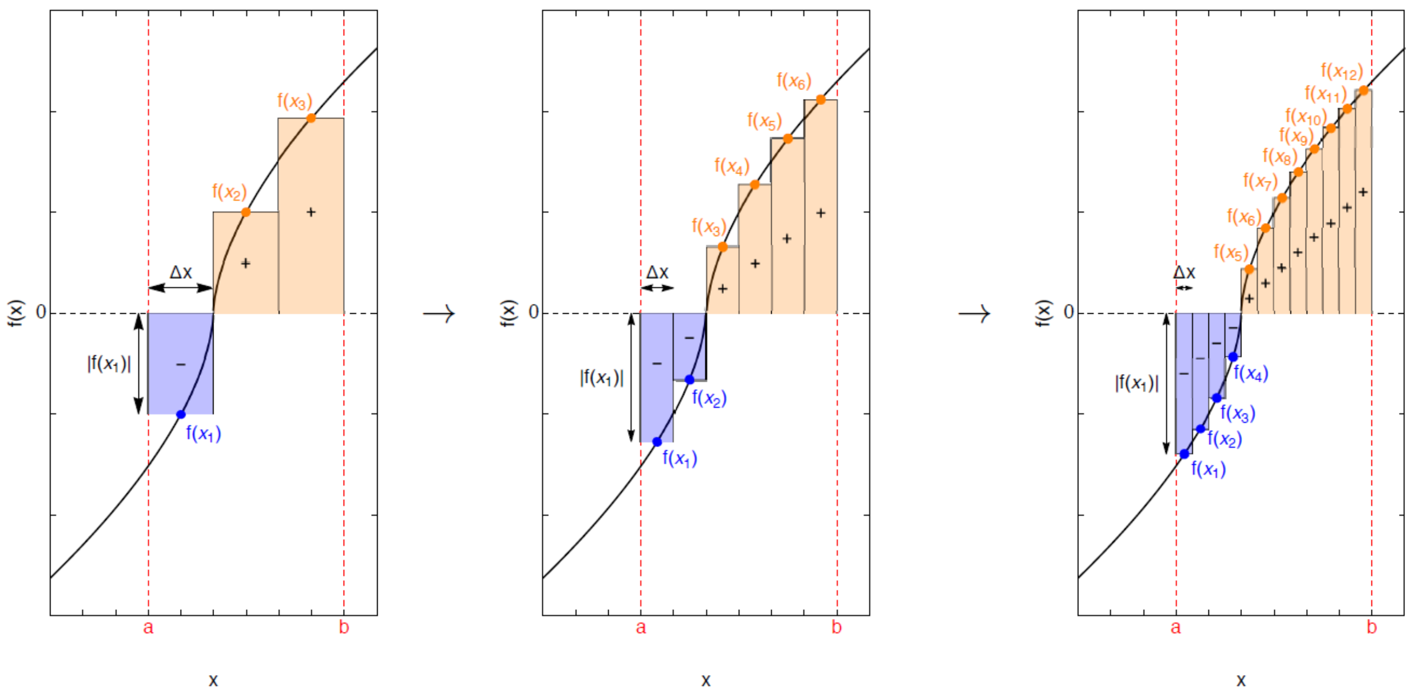
- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:



Integral $\int_a^b dx\, f(x)$

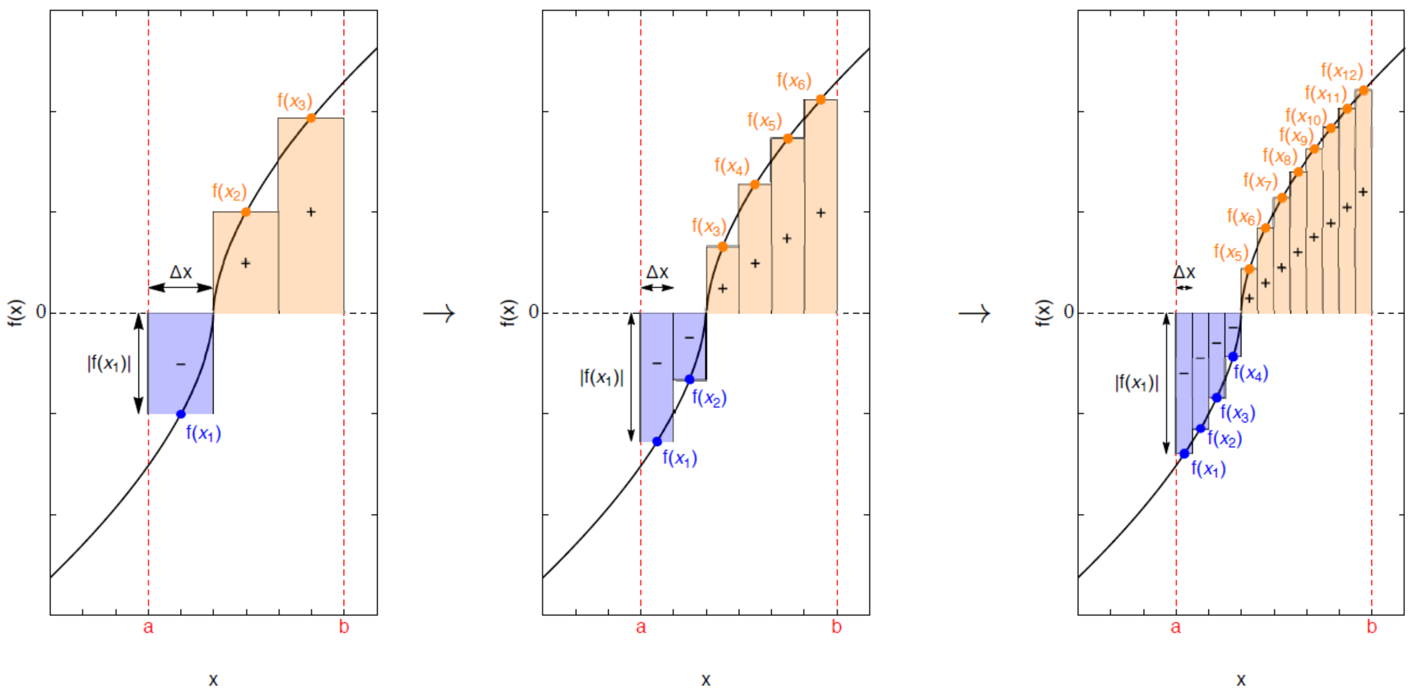
§ 5. Integralrechnung

- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:



§ 5. Integralrechnung

- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:

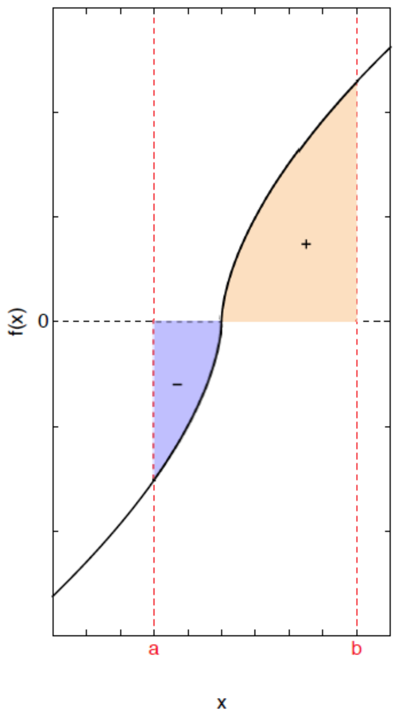


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \underbrace{\Delta x\, f(x_i)}$$

vorzeichenbehafteter
Flächeninhalt des i-ten Rechtecks

§ 5. Integralrechnung

- Nomenklatur beim Integral:



obere Integralgrenze

Integrand

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

Differenzial

untere Integralgrenze

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Definition der Stammfunktion:

$$F(x) \text{ ist Stammfunktion von } f(x) \quad \leftrightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

  - Stammfunktion nicht eindeutig: man kann beliebige Konstante addieren.

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Definition der Stammfunktion:

$$F(x) \text{ ist Stammfunktion von } f(x) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$$

  - Stammfunktion nicht eindeutig: man kann beliebige Konstante addieren.

- Ein paar wichtige Stammfunktionen:

Potenzen/Polynome: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

1/x: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow F(x) = \ln(|x|)$

Exponentialfunktion: $f(x) = e^{\alpha x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a = F(x)|_b^a$$

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(a) - F(b) = [F(x)]_b^a = F(x)|_b^a$$

Beispiele: $\int_{-1}^{1} dx\, e^{2x} = ?$ $\int_0^1 dx \sin(2x) = ?$