SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 8: Integration

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

Dezember 14, 2020

Lehrevaluation

- Diese Woche findet eine Lehrevaluation statt.

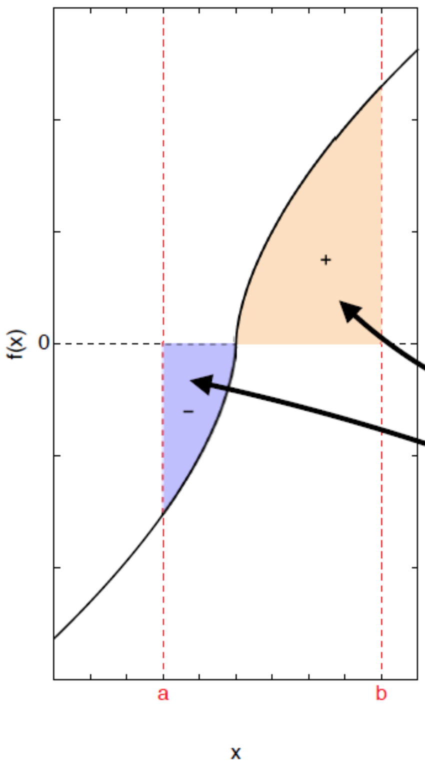
  Fragebogen: http://befragung.zqa.tu-dresden.de/uz/sl/YdPi0fw8ifXF

  - Vollständig anonym
  - Gültig bis zum 21.12.2020
  - Ihre Teilnahme hilft bei der Verbesserung der Vorlesungen!

Vielen Dank für Ihre Teilnahme!

§ 5. Integralrechnung

- Integral als Fläche:



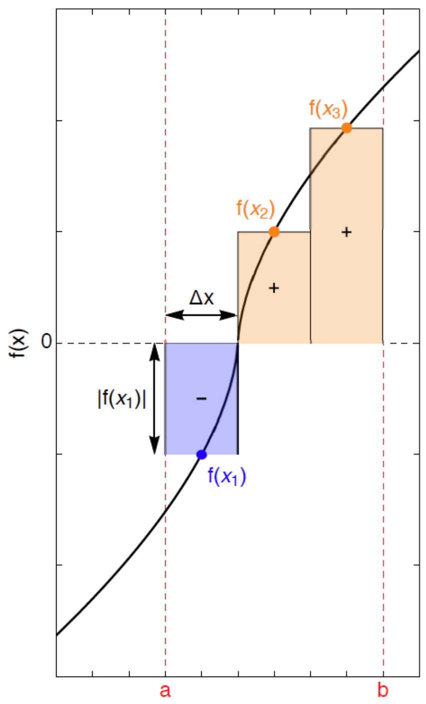
Integral $\int_a^b dx\, f(x)$:

Flächeninhalt unter Kurve mit

- Anteil über *x*-Achse: zählt positiv
- Anteil unter *x*-Achse: zählt negativ

§ 5. Integralrechnung

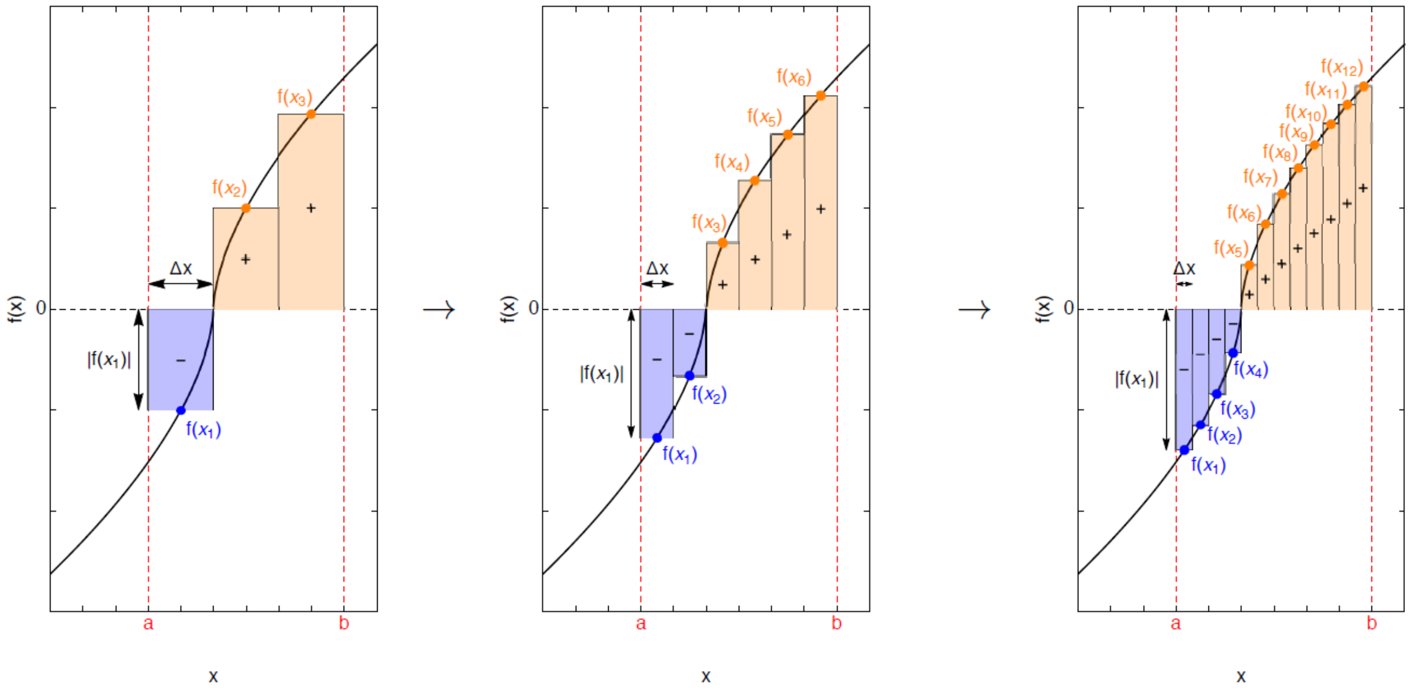
- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:



Integral $\int_a^b dx\, f(x)$

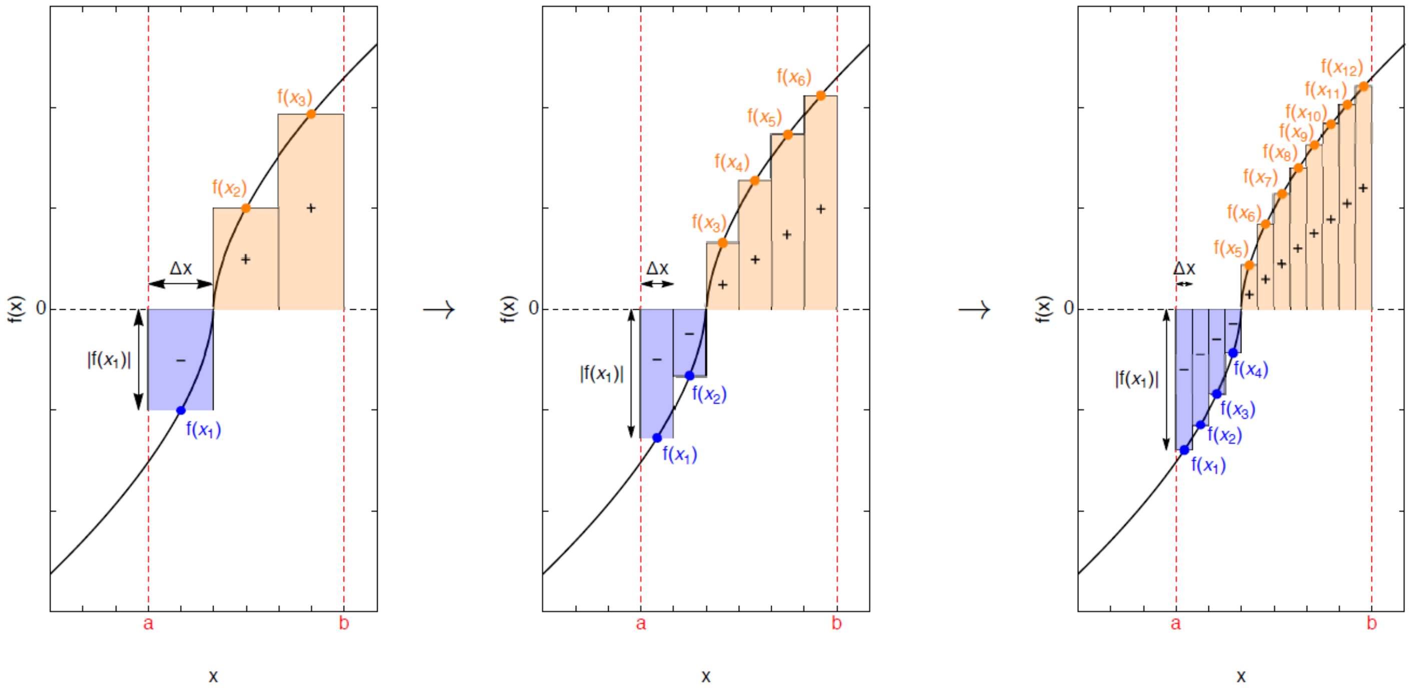
§ 5. Integralrechnung

- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:



§ 5. Integralrechnung

- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:

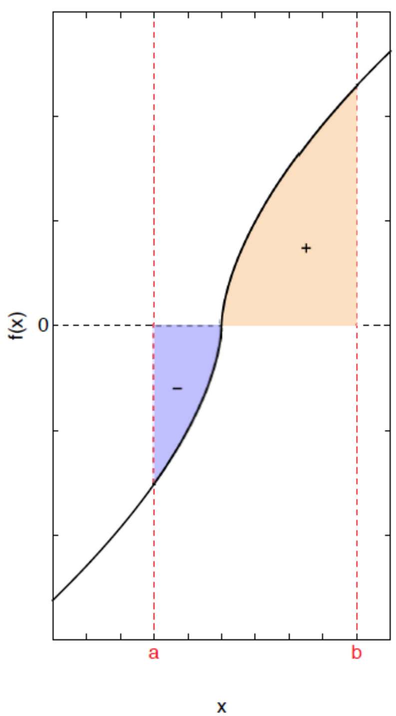


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \Delta x\, f(x_i)$$

vorzeichenbehafteter
Flächeninhalt des i-ten Rechtecks

§ 5. Integralrechnung

- Nomenklatur beim Integral:



obere Integralgrenze

Integrand

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

Differenzial

untere Integralgrenze

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Definition der Stammfunktion:

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$ $\longleftrightarrow$ $\dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Definition der Stammfunktion:

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$ $\longleftrightarrow$ $\dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$

  - ➢ Stammfunktion nicht eindeutig: man kann beliebige Konstante addieren.

  - ➢ Integration und Differentiation sind mathematische Gegenstücke.

$$f(x) \xrightarrow{\int dx} F(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f(x)$$

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Ein paar wichtige Stammfunktionen:

Potenzen/Polynome: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

1/x: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow F(x) = \ln(|x|)$

Exponentialfunktion: $f(x) = e^{\alpha\, x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel 1: $$\int_{-1}^{1} dx\, e^{2x} = ?$$

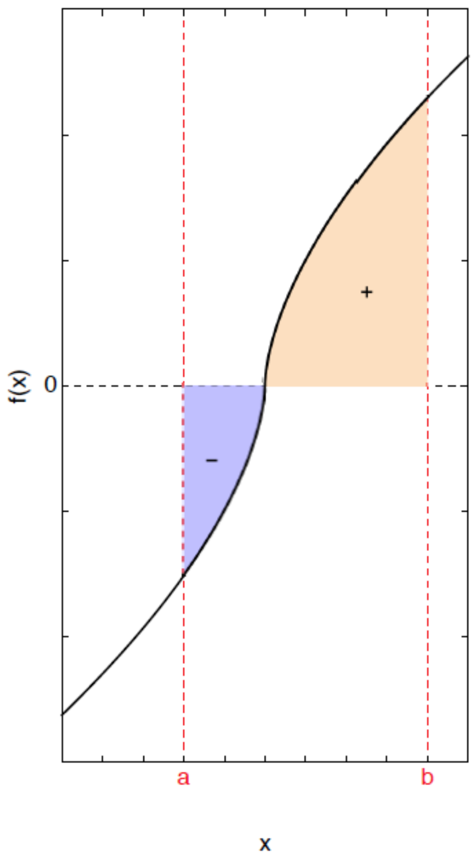
§ 5.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel 2: $\int_0^1 dx \sin(3x) = ?$

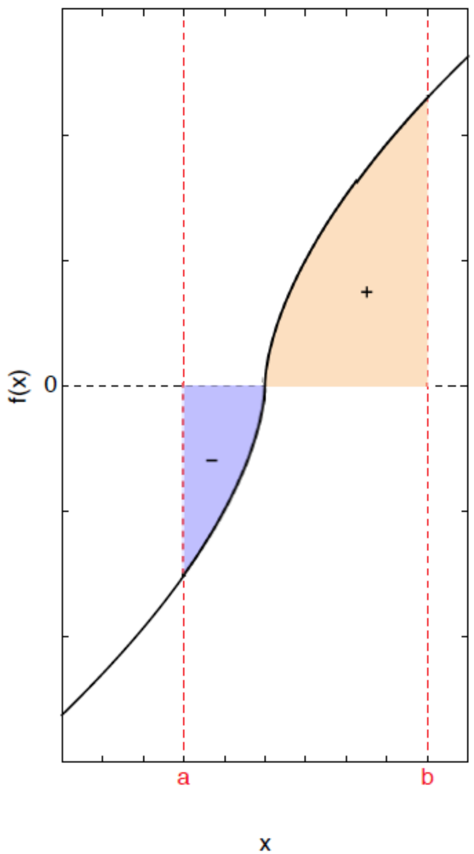
§ 5.2 Uneigentliche Integrale



Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

§ 5.2 Uneigentliche Integrale



Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

- Achtung: Dies funktioniert so, wenn Funktion f nicht divergiert und $a, b \nrightarrow \pm\infty$.

§ 5.2 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliche Integrale:
  - Fall 1: Grenzen unendlich

    Integral = Grenzwert von Grenzen nach unendlich

§ 5.2 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliche Integrale:

  - Fall 1: Grenzen unendlich

    Integral = Grenzwert von Grenzen nach unendlich

obere Grenze: $$\int_a^{\infty} dx\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

untere Grenze: $$\int_{-\infty}^{b} dx\, f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

beide Grenze: $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c dx\, f(x) + \lim_{b\to\infty} \int_c^b dx\, f(x)$$

§ 5.2 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliche Integrale:

  - Fall 2: Integrand unendlich an Stelle c

    Integral = Grenzwert von Grenzen nach c

§ 5.2 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliche Integrale:
  - Fall 2: Integrand unendlich an Stelle c

Integral = Grenzwert von Grenzen nach c

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} dx\, f(x) + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b dx\, f(x)$$

Wichtig: Grenzwerte müssen unabhängig von einander genommen werden.

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Integrale sind linear:
  - Integrationsintervalle können zerlegt werden:

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:

  - Integrale sind linear:

$$\int_a^b dx\ (c_1\, f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \int_a^b dx\, f(x) + c_2 \int_a^b dx\, g(x) \qquad (c_1, c_2 \text{ Zahlen})$$

  - Integrationsintervalle können zerlegt werden:

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^c dx\, f(x) + \int_c^b dx\, f(x)$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - ➢ Vertauschen der Grenzen bringt ein Minus-Zeichen:
  - ➢ Man kann nach Integralgrenzen ableiten:

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Vertauschen der Grenzen bringt ein Minus-Zeichen:

$$\int_a^b dx\, f(x) = -\int_b^a dx\, f(x)$$

  - Man kann nach Integralgrenzen ableiten:

$$\frac{d}{db}\int_a^b dx\, f(x) = \frac{d}{db}\left(F(b) - F(a)\right) = f(b)$$

$$\frac{d}{da}\int_a^b dx\, f(x) = \frac{d}{da}\left(F(b) - F(a)\right) = -f(a)$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Symmetrien erleichtern das Integrieren:

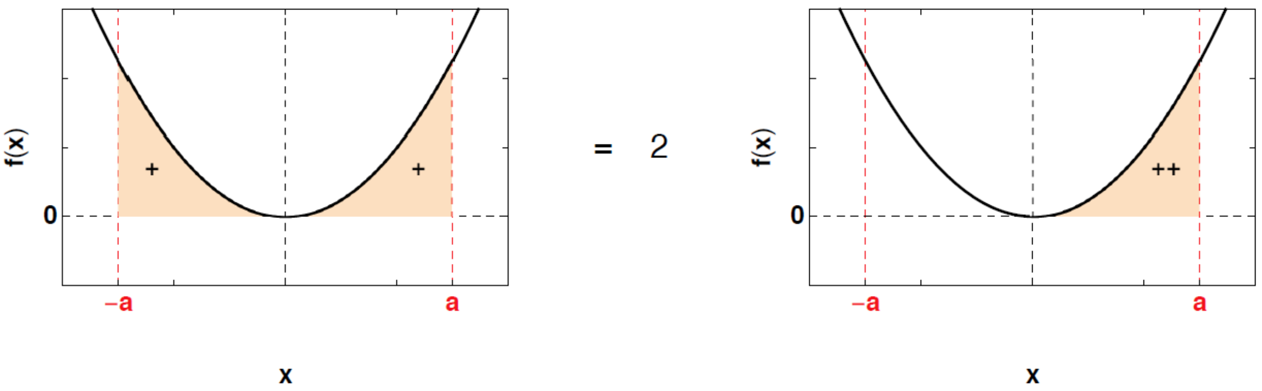
    Fall 1: Funktion achselsymmetrisch („gerade“):

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Symmetrien erleichtern das Integrieren:

    Fall 1: Funktion achselsymmetrisch („gerade“):

$$f(x) = +f(-x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 2\int_{0}^{a} dx\, f(x)$$



§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Symmetrien erleichtern das Integrieren:

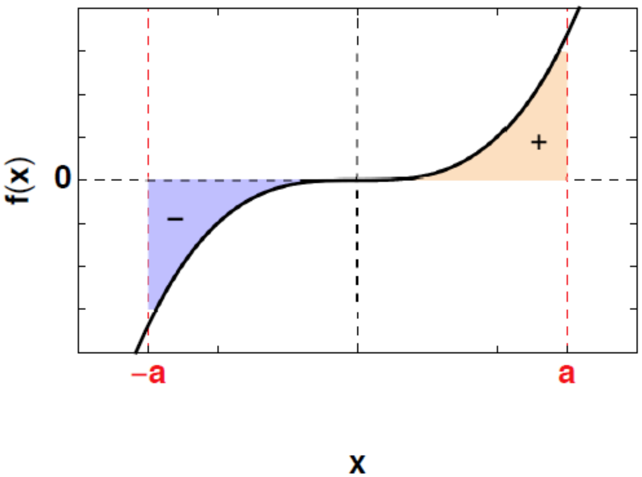
    Fall 2: Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung („ungerade“):

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Symmetrien erleichtern das Integrieren:

    Fall 2: Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung („ungerade“):

$$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 0$$



$= \quad 0$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Beispiel: $\int_0^1 dx \sin(2x+1) = ?$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Verschiebetrick: $x = g(u) = u - x_0$

$$\int_a^b dx\, f(x + x_0) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} du\, f(u)$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Reskalierungstrick: $x = g(u) = \dfrac{u}{\lambda}$

$$\int_a^b dx\, f(\lambda\, x) = \int_{\lambda\, a}^{\lambda\, b} du\, \frac{1}{\lambda} f(u)$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Partielle Integration:

$$\int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, g(x) = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b dx\, f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Partielle Integration:

$$\int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, g(x) = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b dx\, f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}$$

Beweis mit der Produktregel der Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\,(f(x)\, g(x)) = \frac{df(x)}{dx}\, g(x) + f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}$$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Partielle Integration:

$$\int_a^b dx \, \frac{df(x)}{dx} \, g(x) = [f(x) \, g(x)]_a^b - \int_a^b dx \, f(x) \, \frac{dg(x)}{dx}$$

Beispiel 1: $\int_0^1 dx \, xe^x = ?$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Partielle Integration:

$$\int_a^b dx \, \frac{df(x)}{dx} \, g(x) = [f(x) \, g(x)]_a^b - \int_a^b dx \, f(x) \, \frac{dg(x)}{dx}$$

Beispiel 2: $\int_0^1 dx \, x \log(x) = ?$

§ 5.3 Grundlegende Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Man muss oft verschiedene Regeln und Tricks kombinieren...

Beispiel: $$\int_0^1 dx\, x\, \sqrt{1-x^2} = ?$$