SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS20/21)

Vorlesung 9: Integration

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de
Zoom: tuhonghao@gmail.com

Januar 4, 2021

§ 5. Integralrechnung

Letze Vorlesung:

- Integral: Grundbegriff
- Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung
- Uneigentliche Integrale
- Wichtige Stammfunktionen
- Rechenregeln für Integrale

§ 5.4 Einfache Integrale von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Falls Integral nur bezüglich einer Variablen: „ignoriere" andere Variablen

  - Unbestimmtes Integral: einfach Stammfunktion

$$\int dx_i\, f(x_1, \ldots, x_n) = \underline{F_i(x_1, \ldots, x_n)} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dx_i} \underline{F_i(x_1, \ldots, x_n)} = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Stammfunktion bezüglich x_i

§ 5.4 Einfache Integrale von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Falls Integral nur bezüglich einer Variablen: „ignoriere" andere Variablen

  - ➢ Unbestimmtes Integral: einfach Stammfunktion

$$\int dx_i\, f(x_1,\ldots,x_n) = \underline{F_i(x_1,\ldots,x_n)} \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dx_i}\underline{F_i(x_1,\ldots,x_n)} = f(x_1,\ldots,x_n)$$

Stammfunktion bezüglich x_i

  - ➢ Bestimmtes Integral: Stammfunktion in Grenzen

$$\int_a^b dx_i\, f(x_1,\ldots,x_n) = F_i(x_1,\ldots,b,\ldots,x_n) - F_i(x_1,\ldots,a,\ldots,x_n)$$

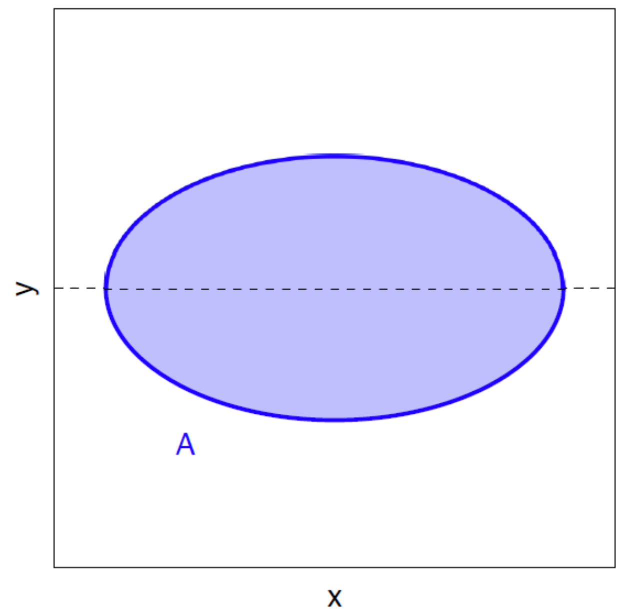
§ 5.4 Einfache Integrale von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel: $$\int_0^1 dx\, e^{xy} = ?$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

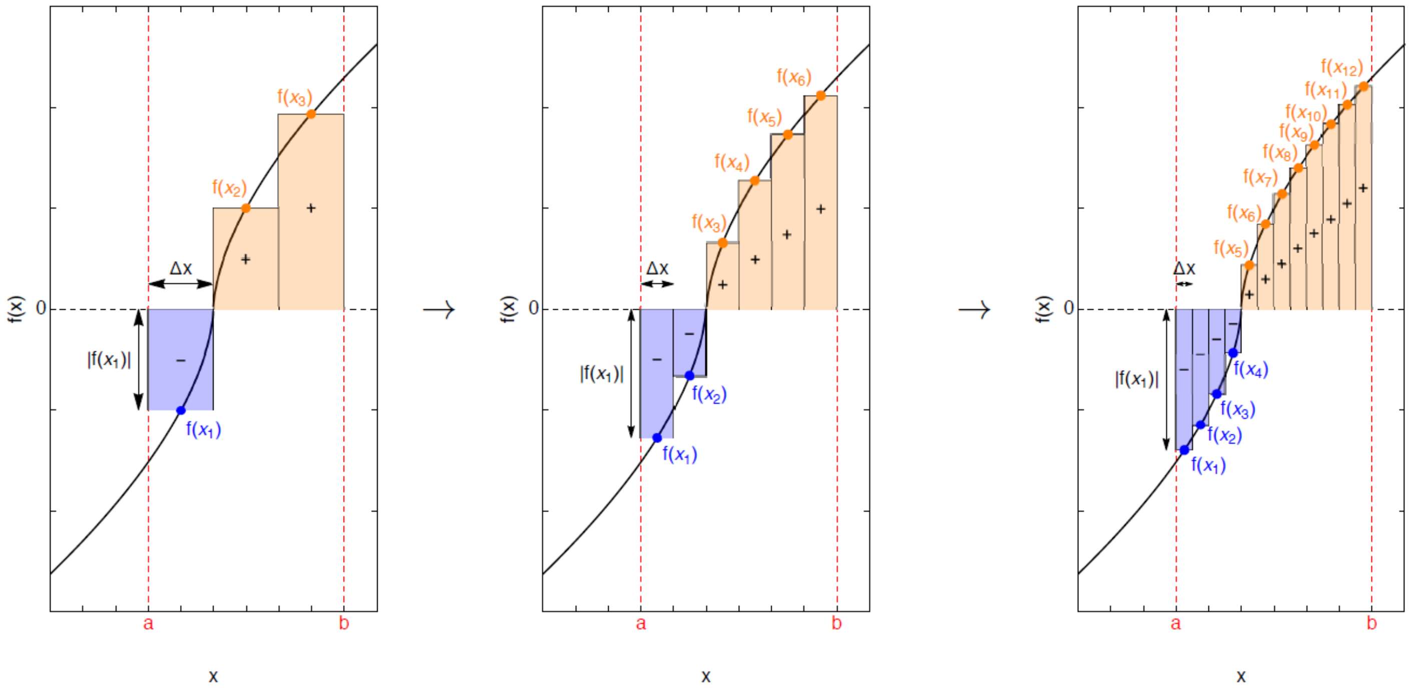
- Flächenintegrale: die Idee

Was ist Flächeninhalt A von beliebigem „Klecks“?



§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Erinnerung: „normale" Integrale



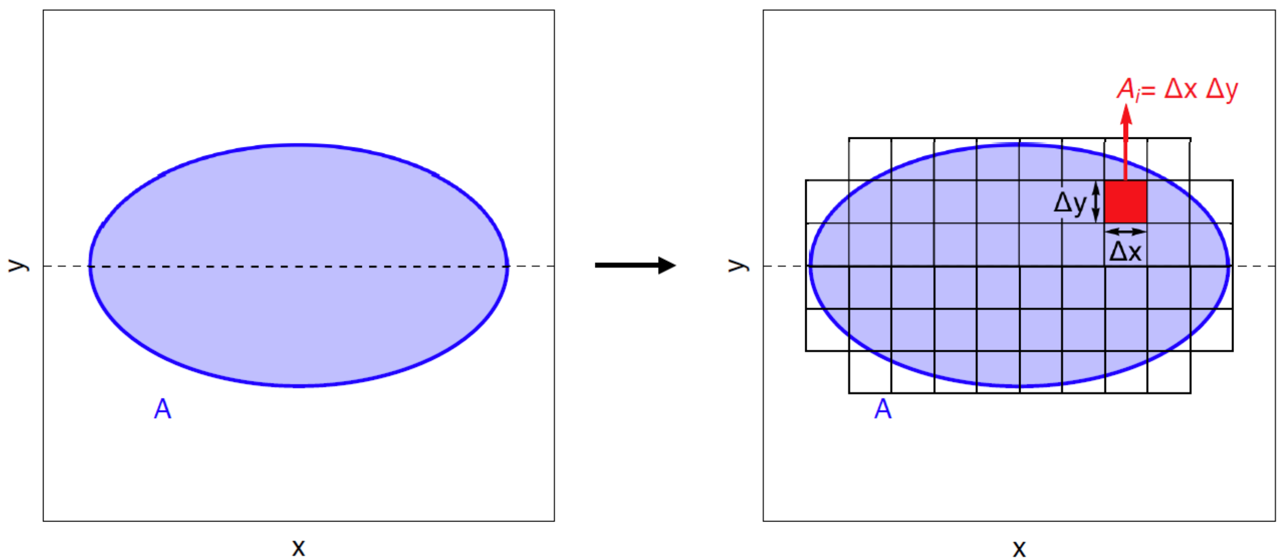
$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \underline{\Delta x\, f(x_i)}$$

vorzeichenbehafteter
Flächeninhalt des i-ten Rechtecks

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Flächenintegral als Grenzwert kleiner Teilflächen:

Flächeninhalt A als Summe vieler kleiner Teilflächen

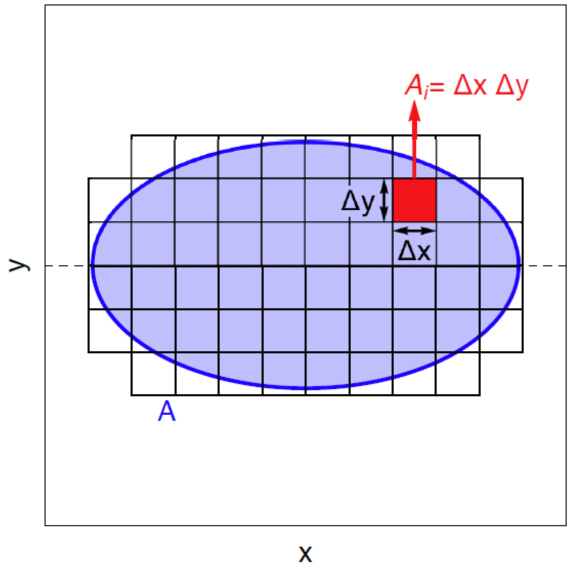


$$A \approx \sum_i A_i = \sum_i \Delta x \, \Delta y$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Flächenintegral als Grenzwert kleiner Teilflächen:

Flächeninhalt A als Summe vieler kleiner Teilflächen



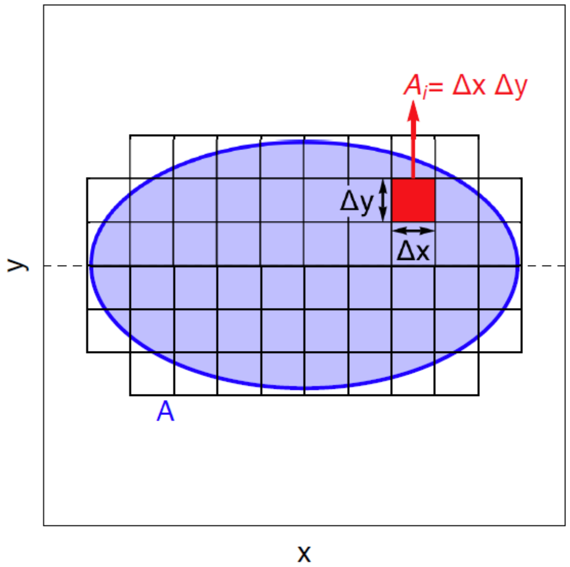
$$A \approx \sum_i A_i = \sum_i \Delta x\, \Delta y$$

$$A = \int_{\text{umrandete Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i A_i$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Flächenintegral als Grenzwert kleiner Teilflächen:

Flächeninhalt A als Summe vieler kleiner Teilflächen



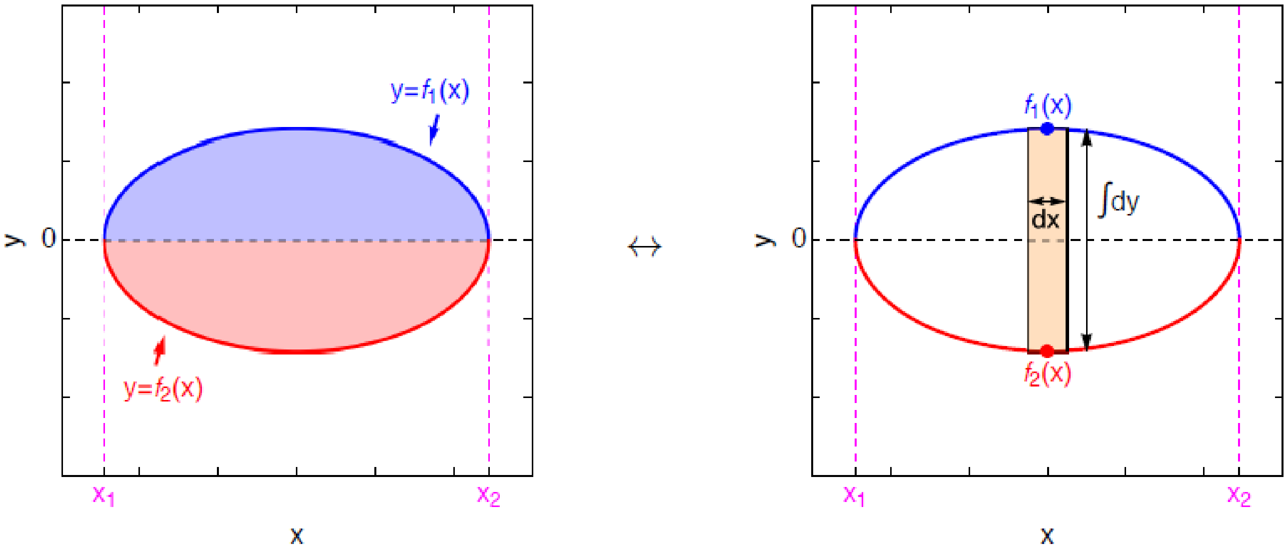
$$A \approx \sum_i A_i = \sum_i \Delta x \, \Delta y$$

$$A = \int_{\text{umrandete Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i A_i$$

Notation: $$\int_{\text{Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \Delta x \Delta y = \int \int_{\text{Fläche}} dx dy = \int \int_{\text{Fläche}} d^2 r$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

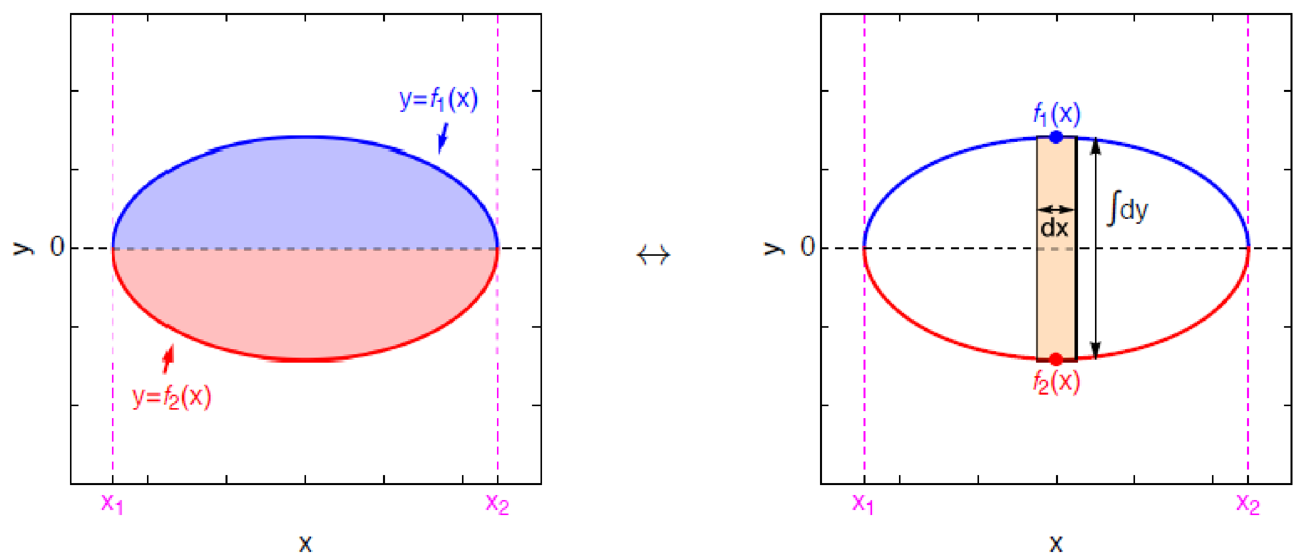
- Praktische Berechnung des Flächenintegrals:



Berechnung: über verschachtelte „normale“ Integrale!

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Praktische Berechnung des Flächenintegrals:

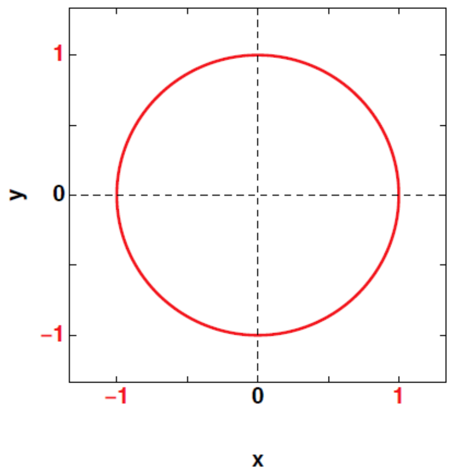


$$A = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f_1(x) - \int_{x_1}^{x_2} dx\, f_2(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \left(f_1(x) - f_2(x)\right) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$

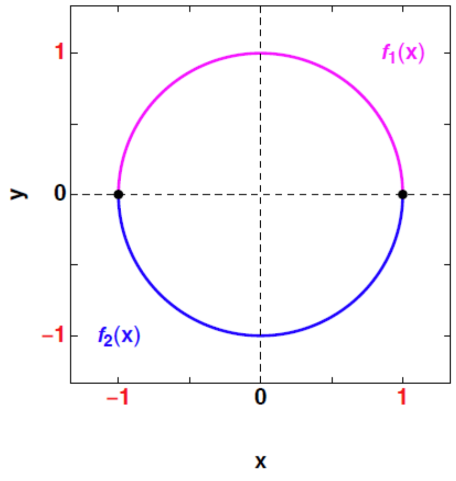
- Was sind die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die den Kreis oben & unten beranden?



§ 5.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$

- Was sind die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die den Kreis oben & unten berandend?

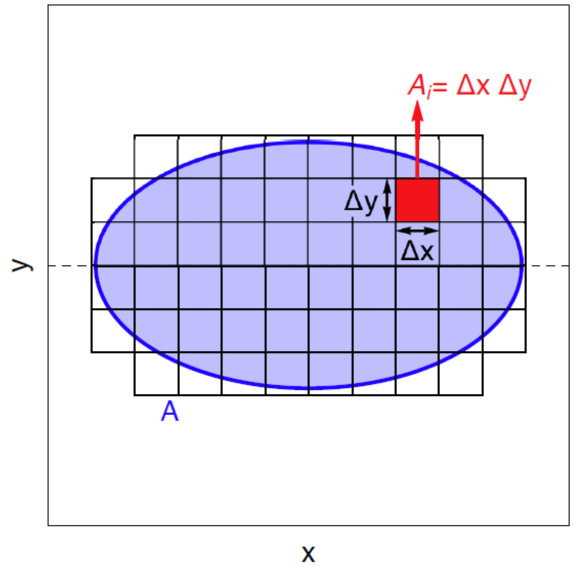


- Was ist der Flächeninhalt des Einheitskreises?

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Erinnerung: Flächenintegral

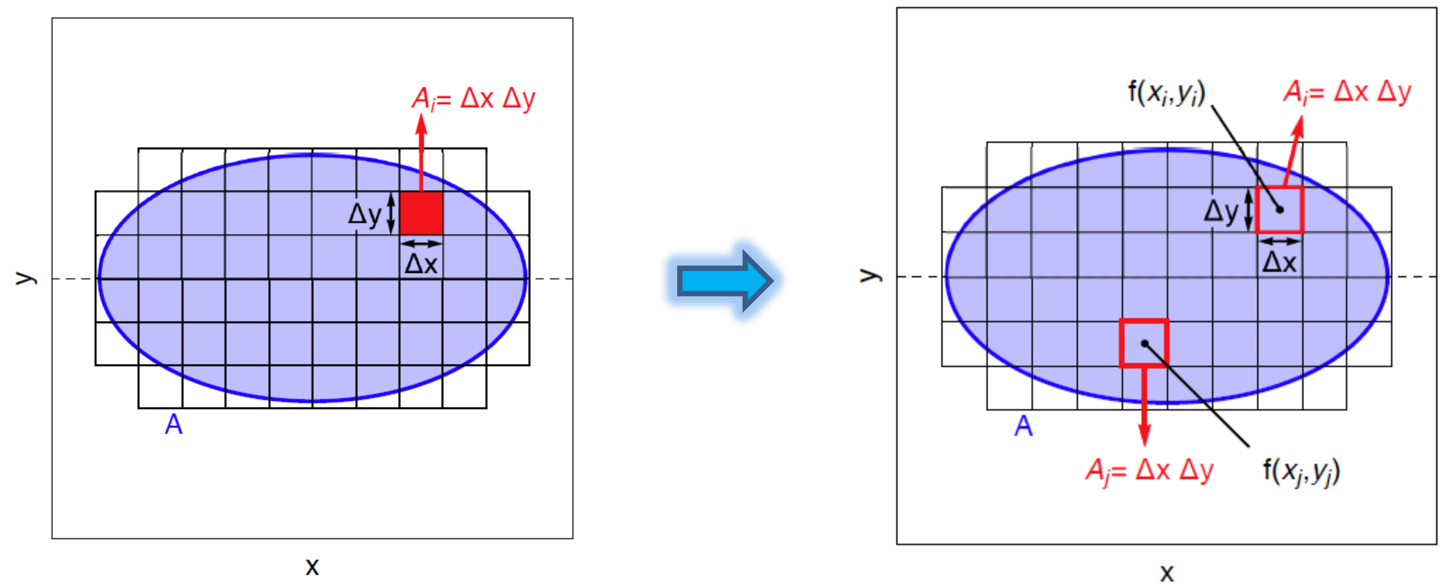
$$\int_{\text{Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \Delta x \Delta y = \int \int_{\text{Fläche}} dx dy = \int \int_{\text{Fläche}} d^2 r$$



§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Im Allgemeinen: Flächenintegral einer Funktion

$$\int_{\text{Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \Delta x \Delta y = \int \int_{\text{Fläche}} dx dy = \int \int_{\text{Fläche}} d^2 r$$

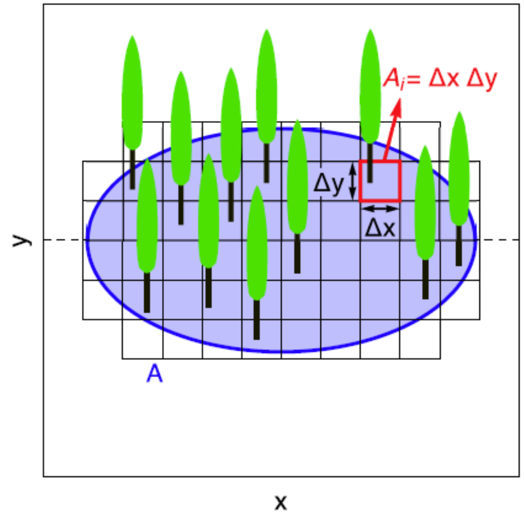


$$\int \int_A dx\, dy\, \underline{f(x,y)} = \int \int_A f(x,y)\, dx\, dy = \int dx \int dy\, f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i A_i\, f(x_i, y_i)$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Baumzahl als Flächenintegral

$$\begin{aligned}\text{Anzahl Bäume} &= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume in Quadrat } i \\ &= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume pro Fläche} \cdot \text{Fläche} \\ &= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Baum-Dichte} \cdot \text{Fläche}\end{aligned}$$



§ 5.5 Mehrfachintegrale

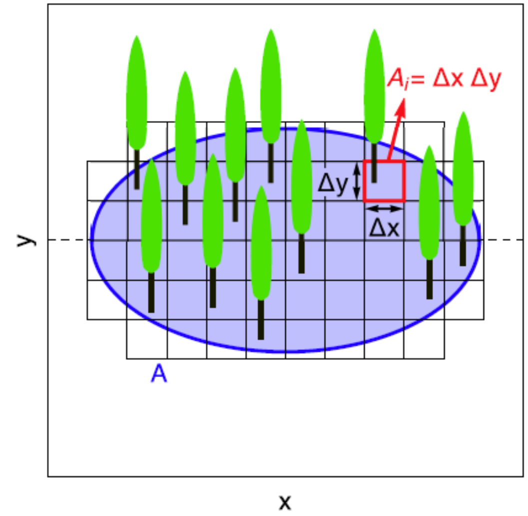
Beispiel: Baumzahl als Flächenintegral

$$\text{Anzahl Bäume} = \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume in Quadrat } i$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume pro Fläche} \cdot \text{Fläche}$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \underline{\text{Baum-Dichte}} \cdot \text{Fläche}$$

$$\rho_{\text{Baum}}(\text{Quadrat } i) = \frac{\text{Anzahl Bäume im Quadrat } i}{\text{Fläche des Quadrats } i}$$



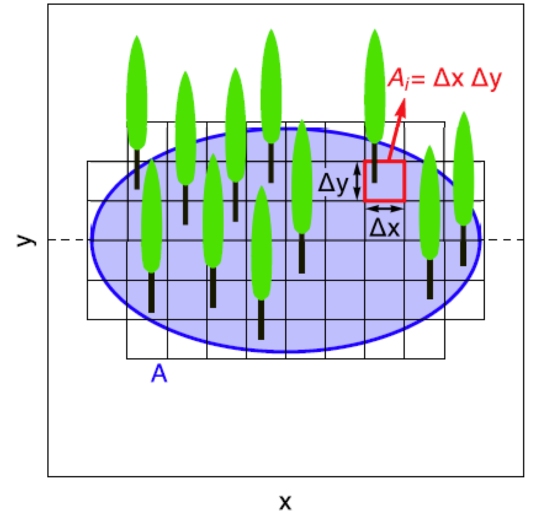
§ 5.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Baumzahl als Flächenintegral

$$\text{Anzahl Bäume} = \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume in Quadrat } i$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume pro Fläche} \cdot \text{Fläche}$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \underline{\text{Baum-Dichte}} \cdot \text{Fläche}$$



$$\rho_{\text{Baum}}(\text{Quadrat } i) = \frac{\text{Anzahl Bäume im Quadrat } i}{\text{Fläche des Quadrats } i}$$

$$\rho_{\text{Baum}}(x, y) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\text{Fläche direkt unterhalb des Baums}} \end{cases}$$

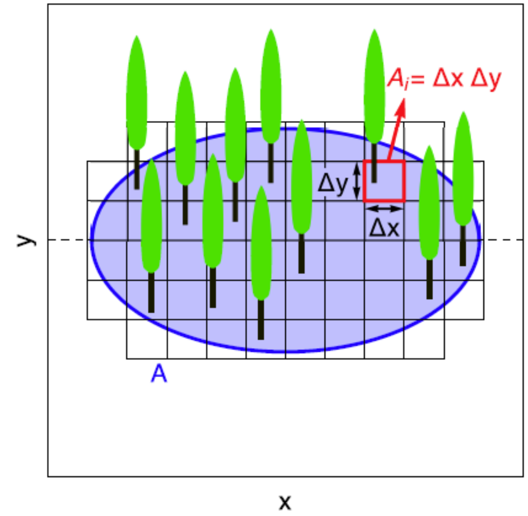
§ 5.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Baumzahl als Flächenintegral

$$\text{Anzahl Bäume} = \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume in Quadrat } i$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume pro Fläche} \cdot \text{Fläche}$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \underline{\text{Baum-Dichte}} \cdot \text{Fläche}$$

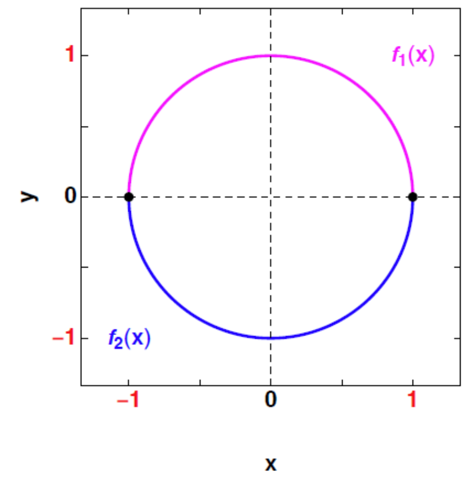


$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum_{\text{Quadrate } i} \rho_{\text{Baum}}(\text{Quadrat } i)\Delta x \Delta y$$

$$= \int dA\, \rho_{\text{Baum}}(x,y) = \int\int_A dx dy\, \rho_{\text{Baum}}(x,y)$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

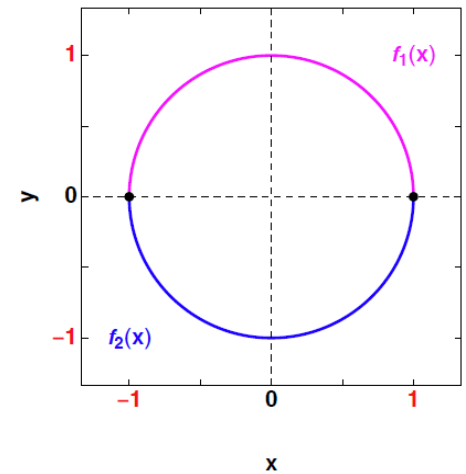
Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} y^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;= ?$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} y^2 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x \mathrm{d}y \;= ?$$

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, y^2 \sqrt{1 - x^2} \;= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{2}{3} (\sqrt{1 - x^2})^3 \sqrt{1 - x^2}$$

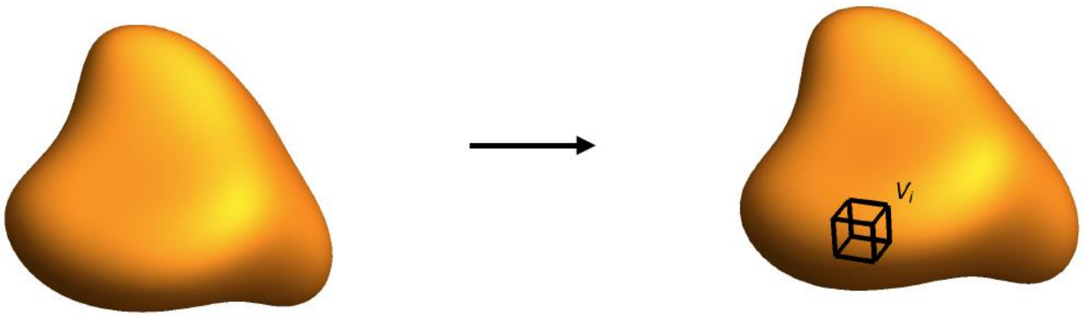
$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \frac{2}{3} (1 - x^2)^2 \;= \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, (1 - 2x^2 + x^4)$$

$$= \frac{2}{3}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right) = \frac{32}{45}$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Volumenintegral als Grenzwert kleiner Teilvolumen:

Was ist das Volumen dieses Blobs?



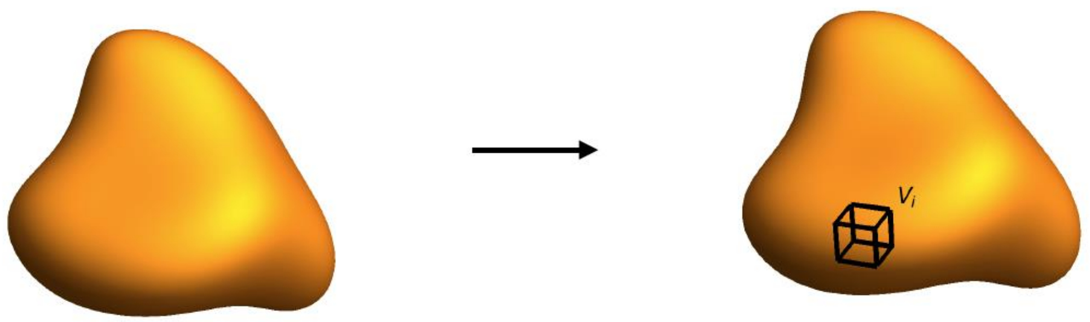
$$V \approx \sum_i V_i = \sum_i \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

$$\Rightarrow \quad V = \int_{\text{Volumen des Blobs}} dV = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_i V_i$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Volumenintegral als Grenzwert kleiner Teilvolumen:

Was ist das Volumen dieses Blobs?

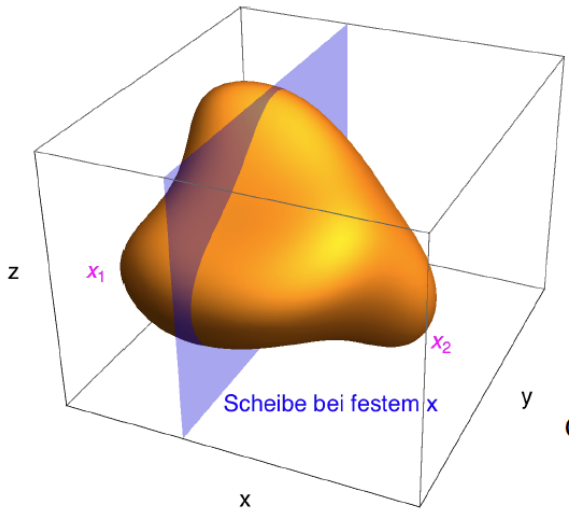


$$V = \int_{\text{Volumen des Blobs}} dV = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_i V_i$$

$$\int dV = \int dx \int dy \int dz = \int \int \int dx\, dy\, dz = \int d^3 r$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Praktische Berechnung des Volumenintegrals:



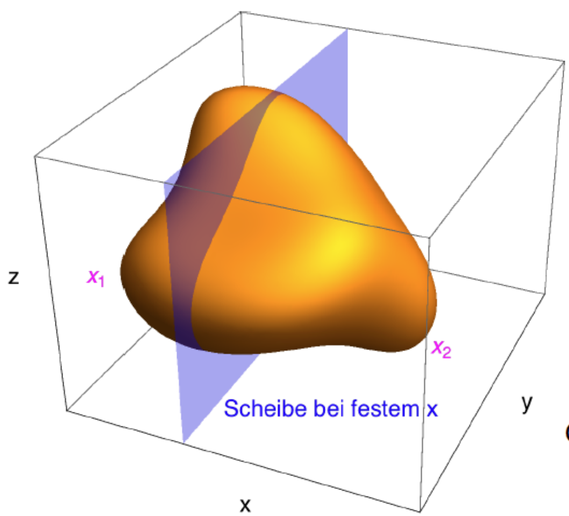
A(x) = Flächeninhalt der Scheibe bei *x*

$$V = \int dV = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{dx\, A(x)}$$

dx *A(x)* = infinitesimales Volumen der Scheibe bei *x*

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Praktische Berechnung des Volumenintegrals:



A(x) = Flächeninhalt der Scheibe bei *x*

$$V = \int dV = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{dx\, A(x)}$$

dx *A(x)* = infinitesimales Volumen der Scheibe bei *x*

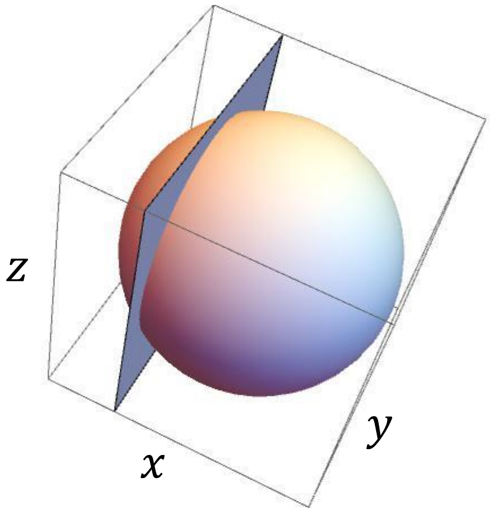
$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \underline{\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy \int_{h_2(x,y)}^{h_1(x,y)} dz}$$

Flächenintegral $A(x)$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

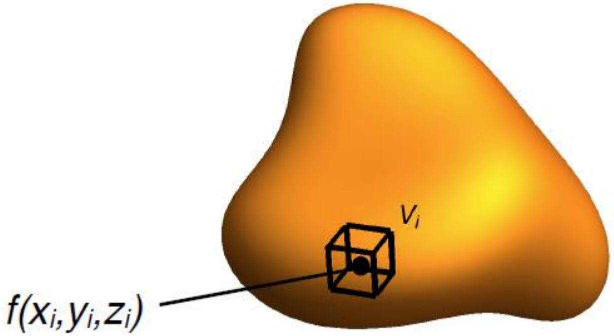
Beispiel: Einheitskugel, definiert über $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$V = \iiint_{\mathrm{Einheitskugel}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$$



§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Im Allgemeinen: Volumenintegral einer Funktion



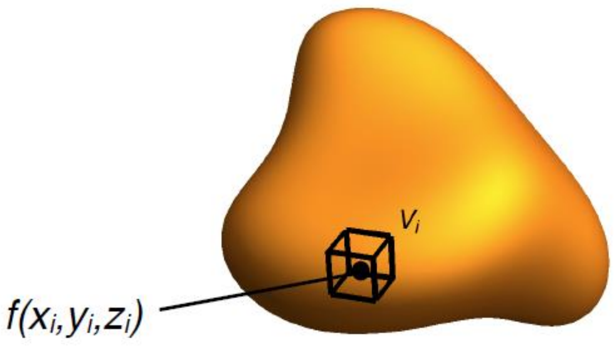
$$\int dV\, f(x,y,z) = \int dx \int dy \int dz\, f(x,y,z) = \int\int\int dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int d^3r\, f(x,y,z)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \lim_{\Delta y\to 0} \lim_{\Delta z\to 0} \sum_i V_i\, f(x_i,y_i,z_i)$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \lim_{\Delta y\to 0} \lim_{\Delta z\to 0} \sum_i \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, f(x_i,y_i,z_i)$$

§ 5.5 Mehrfachintegrale

- Viele Variablen (nicht nur x, y, z): sehr ähnlich!



$$\int d^n r\, f(x_1, \ldots, x_n) = \int dx_1 \ldots \int dx_n\, f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta x_i \right) f(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$$

Berechnung: auch wieder durch verschachtelte „normale“ Integrale

§ 5.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

- Bei Ableitungen: Satz von Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Im Allgemeinen vertauschen die zweiten Ableitungen NICHT:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \neq \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Satz von Schwarz: Ableitungen vertauschen bei „netten“ Funktionen

Funktion f ist k mal stetig differenzierbar ⇒ Alle l-ten Ableitungen mit $l \leq k$ vertauschbar!

§ 5.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

- Bei Integralen:

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \stackrel{?}{=} \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

§ 5.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

- Bei Integralen: Satz von Fubini

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \stackrel{?}{=} \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

- Integrale dürfen im Allgemeinen NICHT vertauscht werden!
- Integrale können sicher vertauscht werden, wenn sie

  i) feste Grenzen haben und ii) der Integrand stetig ist.

§ 5.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

- Bei Integralen: Satz von Fubini

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \stackrel{?}{=} \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

➢ Integrale dürfen im Allgemeinen NICHT vertauscht werden!

➢ Integrale können sicher vertauscht werden, wenn sie

i) feste Grenzen haben und ii) der Integrand stetig ist.

Physikerpraxis: Meistens (aber eben nicht immer) vertauschen Integrale

§ 5.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

Gegenbeispiel: Integralgrenzen hängen von Variablen ab

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y = ? \qquad \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x = ?$$

§ 5.7 Integrale von vektorwertigen Funktionen

- Mehrfachintegrale von vektorwertigen Funktionen:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{e}_j \, f_j(\vec{r})$$

§ 5.7 Integrale von vektorwertigen Funktionen

- Mehrfachintegrale von vektorwertigen Funktionen:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{e}_j \, f_j(\vec{r})$$

$$\Downarrow$$

$$\int d^n r \, \vec{f}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{e}_j \int d^n r \, f_j(\vec{r})$$

Führe Integration komponentenweise durch!