Übungsblatt 10

1. **Koordinatentransformation** (2+2 Punkte)

Der Punkt P_1 habe Kugelkoordinaten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/6, 2\pi/3)$. Wie lauten seine kartesischen und Zylinderkoordinaten, (x, y, z) bzw. (ρ, φ, z)? Der Punkt P_2 habe Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z) = (4, \pi/4, 2)$. Wie lauten seine kartesischen und Kugelkoordinaten? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)

2. **Jacobi-Determinante** (2+3 Punkte)

Berechnen Sie die Jacobi-Determinanten für die Transformationen (a) von kartesischen zu Zylinderkoordinaten bzw. (b) von kartesischen zu Kugelkoordinaten.

3. **Massendichte eines Würfels** (2+2+2 Punkte)

Wir betrachten nun einen Würfel der Kantenlänge $2\,a$. Der Würfel habe in seinem Inneren eine Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0\, \vec{r}^2$. Der Würfel liege so, dass eine Ecke bei $\vec{r} = (-a, -a, -a)^T$ liegt und eine andere Ecke bei $\vec{r} = (a, a, a)^T$.

Hinweis: Wenn der Würfel parallel zu den Koordinatenachsen liegt, gilt

$$\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\,,$$

wobei das Innere des Würfels x-Koordinaten zwischen x_1 und x_2, y-Koordinaten zwischen y_1 und y_2 und z-Koordinaten zwischen z_1 und z_2 hat. Weiterhin löst man ein Mehrfachintegral der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, \left(f(x)\, g(y)\, h(z)\right)$$

über das Produkt der Einzelintegrale,

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x)\right) \cdot \left(\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y\, g(y)\right) \cdot \left(\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, h(z)\right).$$

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M des Würfels durch Integration der Massendichte,

$$M = \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V \rho(\vec{r}).$$

(b) Bestimmen Sie nun die Koordinate des Schwerpunkts $\vec{R}$. Dieser ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V\, \rho(\vec{r})\, \vec{r}}{\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V\, \rho(\vec{r})}.$$

(c) Berechnen Sie nun noch das Trägheitsmoment des Würfels für eine Drehung um die z-Achse, das durch

$$I_z = \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V \rho(\vec{r})\, \left[(x - R_x)^2 + (y - R_y)^2\right]$$

gegeben ist.