WS2020/21: Rechenmethoden für Lehramt Physik | Ausgabe: 18.01.2021
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Übungsblatt 11

1. **Gradient für** $f(r)$ (2+2 Punkte)

(a) Für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\vec{r}|$, berechnen Sie ∇r und ∇r^2.

(b) $f(r)$ sei eine allgemeine, zweimal differenzierbare Funktion von r. Berechnen Sie $\nabla f(r)$, ausgedrückt durch $f'(r)$, die erste Ableitung von f nach r.

2. **Nabla-Identitäten** (2+4 Punkte)

(a) Gegeben seien das Skalarfeld $f(x, y, z) = y^{-1} \cos(z)$ und die Vektorfelder $\vec{A}(x, y, z) = \left(-y, x, z^2\right)^T$ und $\vec{B}(x, y, z) = (x, 0, 1)^T$. Berechnen Sie ∇f, $\nabla \cdot \vec{A}$, $\nabla \times \vec{A}$, $\nabla \cdot \vec{B}$, $\nabla \times \vec{B}$.

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für ein *allgemeines* Skalarfeld $f(x, y, z)$ und *allgemeine* Vektorfelder $\vec{A}(x, y, z)$ und $\vec{B}(x, y, z)$ (mittels Indexnotation, d.h. ohne $\vec{A}$, $\vec{B}$ und ∇ als Spaltenvektoren darzustellen):

(i) $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

(ii) $\nabla \times (f\vec{A}) = f(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla f)$

(iii) $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A})$

(iv) $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad \text{wobei} \quad \nabla^2 = (\nabla \cdot \nabla)$

Anmerkung: Für jede Identität wird vorausgesetzt, dass die Felder hinreichend oft differenzierbar sind.

3. **Linienintegral** (1+2+2 Punkte)

Das Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters hat die Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{c}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\partial_i B_j - \partial_j B_i = 0$ gilt, falls $\sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \int_{\gamma_K} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.

(c) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_R] = \int_{\gamma_R} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{B}$ für den geschlossenen Weg γ_R entlang den Kanten des Rechtecks mit Eckpunkten $(1, 0, 0)^T$, $(2, 0, 0)^T$, $(2, 3, 0)^T$ und $(1, 3, 0)^T$.