
Übungsblatt 12

1. Gaußsches Integral (2 Punkte)

Bestimmen Sie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0),$$

indem Sie zunächst das Quadrat des Integrals in Polarkoordinaten berechnen.

2. Ein explizites Beispiel für den Satz von Gauß (2+3 Punkte)

Betrachten Sie das statische Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} z \\ x^2 + z^2 \\ xz \end{pmatrix},$$

und überprüfen Sie den (Integral-) Satz von Gauß,

$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int dS \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}). \quad (1)$$

- Berechnen Sie hierzu zuerst das Volumenintegral auf der linken Seite von Gleichung (1), wobei Sie als Integrationsvolumen einen um den Ursprung zentrierten Würfel mit Seitenlänge 2 wählen (der also die Punkte \vec{r} mit $-1 \leq x, y, z \leq 1$ umfasst).
- Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1), indem Sie alle sechs Oberflächenintegrale ausführen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teil (a).

3. Aharonov-Bohm Effekt (2+3 Punkte)

Der Aharonov-Bohm Effekt ist ein quantenmechanischer Interferenzeffekt. Der Welle-Teilchen-Dualismus erlaubt es, ein Elektron als eine Welle zu verstehen. Wenn Elektronenwellen aufeinandertreffen, kommt es im Allgemeinen zu Interferenz. Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz von einem Magnetfeld beeinflusst das von der Elektronenwelle räumlich getrennt ist.

Das Magnetfeld \vec{B} wird in der Elektrodynamik als Rotation eines "Eichfelds" (oder "Vektorpotentials") $\vec{A}(\vec{r})$ beschrieben,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}).$$

Betrachten Sie im Folgenden das statische Eichfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ an Orten \vec{r} außerhalb der z -Achse (also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ oder $x, y \neq 0$).
- Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz einer elektronischen Welle, die sich entlang eines geschlossenen Weges \mathcal{C} bewegt (also z.B. im Kreis) durch den "magnetischen Fluss" Φ

bestimmt, der durch die Elektronenbahn eingeschlossen wird. Dieser ist das Integral des magnetischen Feldes über die vom Weg eingeschlossene Fläche. Betrachten Sie nun eine Elektronenwelle, die sich entlang eines Kreisringes mit Radius 1 um die z -Achse in der (xy) -Ebene bewegt (also bei $z = 0$). Berechnen Sie den magnetischen Fluss

$$\Phi = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

durch eine Kreisscheibe mit Radius 1 um die z -Achse in der (xy) -Ebene, also bei $z = 0$, mit Hilfe des Satzes von Stokes. Stehen dieses Ergebnis im Widerspruch zu Aufgabenteil (a)? *Hinweis:* Nutzen Sie wieder das am besten passenden Koordinatensystem für die Berechnung des Integrals. Wählen Sie den Normalenvektor der Fläche als in positive z -Richtung zeigend.