Ausgabe: 02.02.2021

Übungsblatt 13

1. **Trennung der Variablen**

Eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung heißt 'autonom', wenn sie die Form $\dot{x} = f(x)$ hat, also die rechte Seite zeitunabhängig ist [nicht-autonom wäre $\dot{x} = f(x,t)$]. Solche Gleichungen können mit Trennung der Variablen gelöst werden.

(a) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ für zwei verschiedene Anfangsbedingungen: (i) $x(0) = 1$ und (ii) $x(2) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $x(-2) = \frac{1}{3}$, und (ii) $x(2) = -1$.]

(b) Skizzieren Sie die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich, dass Ihre Skizzen für die Funktion $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

2. **Inhomogene lineare Differentialgleichung, Variation der Konstanten**

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\dot{x} + 2x = t$ mit $x(0) = 0$, wie folgt:

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie dann durch Variation der Konstanten eine spezielle (partikuläre) Lösung des inhomogenen Problems. [Kontrollergebnis: $x(-\ln 2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.]

3. **Gekoppelte Differentialgleichungen**

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -5\,f(x) + 3\,g(x)\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = -5\,g(x) + 3\,f(x)\,.$$

mit Hilfe des Vektors $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ und einer Matrix-Darstellung der gekoppelten Differentialgleichungen über die Eigenwerte und -vektoren dieser Matrix.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen gekoppelten Differentialgleichungen nun auf einem alternativen Rechenweg dadurch, dass Sie neue Differentialgleichungen für $h_+(x) = f(x) + g(x)$ und für $h_-(x) = f(x) - g(x)$ ableiten, und dann die allgemeine Lösung für $h_+(x)$ und $h_-(x)$ bestimmen. Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis konsistent mit dem von Aufgabenteil (a) ist.

(c) Bestimmen Sie nun die spezielle Lösung, die die Randbedingungen

$$f(0) = 4 \quad \text{und} \quad \frac{\mathrm{d}f(0)}{\mathrm{d}x} = 2$$

erfüllt.