Übungsblatt 3

1. **Matrixmultiplikation** (2 Punkte)

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von Paaren der folgenden Matrizen (inklusive deren Quadrate, wo möglich):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. **Rechenregeln der Spur** (2 Punkte)

Berechnen Sie für die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Spur $\mathrm{Sp}(X\,Z)$. Erklären den Zahlenwert des Ergebnisses in Anbetracht der allgemeinen Rechenregeln für die Spur und indem Sie $X\,Z$ und $Z\,X$ explizit berechnen und vergleichen.

3. **Gauß-Jordan-Algorithmus** (3+2 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

mittels Gauß-Jordan-Algorithmus.

(b) Überprüfen Sie anschließend durch Matrixmultiplikation, dass tatsächlich $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_{3\times 3}$ gilt.

4. **Matrix als Abbildung** (2+2+2 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine Abbildung einen Menge von Anfangsobjekten auf Endobjekte abbildet. Matrizen kann man auch als Abbildungen verstehen, nämlich als Abbildungen von Vektoren auf Vektoren. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, diese Idee mit konkreten Beispielen zu illustrieren.

(a) Berechnen Sie $H\,\vec{a}$ und $H\,\vec{b}$ und $H\,\vec{c}$ mit

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Rechenregeln für Matrizen aus der Vorlesung.

(b) Drücken Sie das Ergebnis von Aufgabenteil (a) mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als

$$H\,\vec{a} = x_1\,\vec{a} + x_2\,\vec{b} + x_3\,\vec{c} \quad \text{und} \quad H\,\vec{b} = y_1\,\vec{a} + y_2\,\vec{b} + y_3\,\vec{c} \quad \text{und} \quad H\,\vec{c} = z_1\,\vec{a} + z_2\,\vec{b} + z_3\,\vec{c}$$

aus.

(c) Drücken Sie weiterhin

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus. Bestimmen Sie ohne explizite Matrixmultiplikation aus den vorherigen Aufgabenteilen, was $H\,\vec{d}$ ergibt.