Übungsblatt 4

1. **Berechnung von Determinanten** (1+1+2 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & a & a & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b \\ a & b & b & 0 \end{pmatrix}.$$

2. **Der Levi-Civita-Tensor** (1+1+1+2 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors die Zyklizität des Spatprodukts

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}),$$

die BAC-CAB-Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

die Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

und die Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})\,(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ Vektoren in drei Dimensionen sind.

3. **Drehmatrizen in zwei Dimensionen** (2+2+2 Punkte)

In zwei Dimensionen wird die Drehung um den Winkel θ durch die Drehmatrix

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Geben Sie die Matrix D_{θ_i} für die Winkel $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$ und $\theta_4 = \pi$ an. Berechnen Sie die Wirkung der D_{θ_i} $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf $\vec{v}_1 = (1, 0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0, 1)^T$.

(b) Die Verknüpfung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Zeigen Sie, dass $D_\theta D_\phi = D_{\theta+\phi}$.

(c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $\vec{v} = (a, b)^T$ die Drehung um einen Winkel θ die Länge nicht ändert, d.h., dass $\vec{w} = D_\theta \vec{v}$ den gleichen Betrag hat wie $\vec{v}$.