Ausgabe: 23.11.2020

Übungsblatt 5

1. **Diagonalisierung reeller 2×2 Matrizen** (3+3 Punkte)

Finden Sie für folgende reellen Matrizen die Eigenwerte $\lambda_j \in \mathbb{R}$, Eigenvektoren $\vec{v}_j \in \mathbb{R}^2$ und die Ähnlichkeitstransformation S sowie deren Inverse, S^{-1}, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist:

$$\text{(a)}\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad\qquad \text{(b)}\quad A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass $S^{-1}AS$ auf der Diagonalen die Eigenwerte enthält.

2. **Diagonalisierung einer 3×3 Matrix** (4 Punkte)

Gegeben ist die von der Variable $x \in \mathbb{R}$ abhängige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3-x & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie die Eigenwerte λ_j und die Eigenvektoren $\vec{v}_j \in \mathbb{R}^3$ von A, mit $j = 1, 2, 3$. *Hinweis:* Einer der Eigenwerte ist $\lambda = x$.

3. **Zur Matrixdiagonalisierung und Indexschreibweise** (3 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine diagonalisierbare Matrix M auf ihre Diagonalform M_{diag} gebracht werden kann, indem man sie mit einer passenden Transformationsmatrix U wie folgt transformiert:

$$M_{\text{diag}} = U^{-1}\, M\, U\,.$$

Dabei sind die Spalten Matrix U durch die Darstellung der Eigenvektoren $\vec{v}_i$ in der ursprünglichen Basis gegeben:

$$M\,\vec{v}_i = \lambda_i\,\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad U = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n)\,.$$

Zeigen Sie, dass für orthonormale Eigenvektoren die Transformationsmatrix U durch Transposition invertiert wird, dass also $U^T\, U = \mathbb{1}$ gilt. Nutzen Sie hierzu die Indexschreibweise.

4. **Determinante gleich Produkt der Eigenwerte** (2 Punkte)

Für eine $(n \times n)$-Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$, d.h., die Determinante ist gleich dem Produkt der Eigenwerte. Beweisen Sie dies für den Fall, dass A diagonalisierbar ist.