Übungsblatt 6

1. **Ableitung** (5 Punkte)

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$

(b) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

(c) $f(x) = e^x(2x-3)$

(d) $f(x) = x\sin\left[\pi\left(x+\frac{1}{6}\right)\right]$

(e) $f(x) = \sin^2(\pi x)$

(f) $f(x) = \tan(x)$

(g) $f(x) = x\ln x$

(h) $f(x) = x\ln(9x^2)$

(i) $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(j) $f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

2. **Ableitung als Grenzwert** (1+1 Punkte)

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung als

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

folgende Gleichungen durch das explizite Bilden des Grenzwerts $\Delta x \to 0$.

(a)
$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx}\,g(x) + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}.$$

(b)
$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{df(x)}{dx}\,g(x) - f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2}.$$

3. **Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion** (2+2 Punkte)

Bestimmen Sie die Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion aus der Definition der Ableitung. *Hinweis:* Die Additionstheoreme könnten verwendet werden, d.h. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ und $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. Zusätzlich benötigen Sie möglicherweise den Grenzwert $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1$.

4. **Gradientenfelder** (1+1+1+1 Punkte)

Berechnen Sie jeweils den Gradient folgender Funktionen und stellen Sie die Funktion und den Gradienten graphisch dar.

(a)
$$f_1(x,y) = 3\,x.$$

(b)
$$f_2(x,y) = x^2 - y^2.$$

(c)

$$f_3(x, y, z) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}},$$

also das Potential einer Punktladung am Ort $\vec{r} = (0, 0, 2)^T$. Zeichnen Sie hier nur $f_3(0, y, 0)$ und die y und z-Komponente von $\nabla f_3(0, y, z)$.

(d)

$$f_4(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$$