Übungsblatt 8

1. **Geschwindigkeit und Beschleunigung** (1+1+1 Punkte)

Gegeben sei die Raumkurve $\gamma = \{\vec{r}(t)\,|\,t \in [-\infty, \infty]\}$, $\vec{r}(t) = (e^{-t^2}, ae^{t^2})^T \in \mathbb{R}^2$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$ ($0 < a < 1$ für (c)).

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}(t)$. Lässt sich $\vec{r}(t)$ durch $\dot{\vec{r}}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$ ausdrücken?

(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter t durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Raumkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$. Finden Sie die Zeit $t(a)$, bei der $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$ gilt.

2. **Integration mittels Substitution** (4 Punkte)

Integrale der Form $I(z) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x\; y'(x) f(y(x))$ lassen sich als $I(z) = \int_{y(z_0)}^{y(z)} \mathrm{d}y f(y)$ schreiben, mittels der Substitution $y = y(x)$, $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$. Beim Berechnen solcher Integrale empfiehlt es sich, $y(x)$ und $\mathrm{d}y$ explizit hinzuschreiben, um den Vorfaktor von $f(y)$ richtig zu identifizieren. Kontrollieren Sie stets, dass die Ableitung $I'(z) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ ihres Ergebnisses den Integranden reproduziert. Sie werden feststellen, dass sich der Faktor $y'(z)$ über die Kettenregel zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen ergibt.

Berechnen Sie folgende Integrale durch Substitution. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x \cos(x^2 + \pi)$ $\quad \left[\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, -\tfrac{1}{2}\right]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \sin^3 x \cos x$ $\quad \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{1}{16}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \dfrac{\sqrt{1 + \ln(x+1)}}{x+1}$ $\quad \left[e^3 - 1, \tfrac{14}{3}\right]$

(d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x^3 e^{-x^4}$ $\quad \left[\sqrt[4]{\ln 2}, \tfrac{1}{8}\right]$

3. **Partielle Integration** (4 Punkte)

Integrale der Form $I(z) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x\; u(x)v'(x)$ lassen sich mittels partieller Integration als $I(z) = [u(x)v(x)]_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x\; u'(x)v(x)$ schreiben. Diese Umformung ist nützlich, falls $u'v$ integrierbar ist – entweder direkt, oder nach weiteren partiellen Integrationen [siehe (b)], oder durch andere Manipulationen [siehe (e,f)]. Beim Durchführen einer solchen Rechnung ist es ratsam, die Faktoren u, v', v und u' klar zu kennzeichnen. Kontrollieren Sie stets, dass die Ableitung $I'(z) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ Ihres Ergebnisses den Integranden reproduziert. Falls eine einmalige partielle Integration ausreicht, um $I(z)$ zu berechnen, werden Sie für dessen Ableitung das Kürzungsmuster $I' = u'v + uv' - u'v = uv'$ wiedererkennen [siehe (a,c,d)]; ansonsten ist das Kürzungsmuster komplizierter [siehe (b,e,f)].

Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x\; e^{2x}$ $\quad \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x^2\; e^{2x}$ $\quad \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{e}{8} - \tfrac{1}{4}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \ln x$ $\quad [1, -1]$

(d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \ln x \tfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad [1, -4]$

(e) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \sin^2 x$ $\quad \left[\pi, \tfrac{\pi}{2}\right]$

(f) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \sin^4 x$ $\quad \left[\pi, \tfrac{3\pi}{8}\right]$

4. **Integrale der Form** $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$ (2+2 Punkte)

Berechnen Sie das Integral $I_n(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$) auf zwei verschiedene Weisen: (a) durch mehrfache partielle Integration, und (b) durch mehrfaches Ableiten:

(a) Berechnen Sie I_0, I_1 und I_2, wo nötig mittels partieller Integration. Zeigen Sie dann mittels partieller Integration, dass $I_n(a) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a)$ für alle $n \geq 1$ gilt. Nutzen Sie diese Beziehung iterativ, um $I_n(a)$ als Funktion von a und n zu bestimmen.

(b) Zeigen Sie durch n-faches Ableiten des Integrals $I_0(a)$ nach a, dass $I_n(a) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n I_0(a)}{\mathrm{d}a^n}$. Berechnen Sie dann diese Ableitungen für einige kleine n-Werte. Folgern Sie aus dem sich ergebenen Muster eine allgemeine Formel für $I_n(a)$.

[Kontrollergebnis: $I_3(2) = \frac{3}{8}$.]