Ausgabe: 04.01.2021

Übungsblatt 9

1. **Zweidimensionale Integration** (2 Punkte)

Berechnen Sie das Flächenintegral $I = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = xy$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq y \leq 1;\ 1 \leq x \leq 2 - y\}$.

2. **Durch Kurven begrenzte Fläche** (2+2+3 Punkte)

Gegeben seien die Kurve $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, b(1 - \frac{t}{a}))^T$ sowie die geschlossene Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (a\cos t, b\sin t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die von γ_2 umschlossene Fläche $S(a,b)$. [Kontrollergebnis: $S(1,1) = \pi$.]

(c) Die Kurve γ_1 teilt die von γ_2 umschlossene Fläche in zwei Teile. Bestimmen Sie die Fläche $A(a,b)$ des kleineren Teilstücks mittels Berechnung eines Flächenintegrals. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geometrischen Überlegung.

3. **Flächenintegral für Volumen einer Pyramide** (2+3 Punkte)

Betrachten Sie die von der xy-Ebene, der yz-Ebene, der xz-Ebene, und der Ebene $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = c(1 - x/a - y/b\}$ eingeschlossene Pyramide, mit $0 < a, b, c \in \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie eine qualitative Skizze der Pyramide. Finden Sie ihr Volumen $V(a,b,c)$ mittels geometrischen Überlegungen. [Kontrollergebnis: $V(1,1,1) = \frac{1}{6}$.]

(b) Berechnen Sie $V(a,b,c)$ indem Sie Höhe $h(x,y)$ der Pyramide über ihre Grundfläche in der xy-Ebene integrieren.