SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 1: Organisatorisches + Vektoralgebra

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Oktober 10, 2022

Rechenmethoden für Lehramt Physik

- Vorlesung: Montag, 5.DS (14:50 – 16:20), Hybrid-Format
- Übung: 1x pro Woche (7 Termine)
- Klausur: (voraussichtlich) zwei Wochen nach der Vorlesungszeit

https://tu-dresden.de/mn/physik/itp/ket/studium/lehre/rlp_ws22

➢ Informationen, Skripte, Übungsblätter/Musterlösungen, Videos...

https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/36655300609

➢ Einschreibung, Forum...

Vorlesung

Raum: REC/C213

Zoom-Link:
https://us02web.zoom.us/j/5083201475?pwd=Nkp5VXBlSVpGdHBCSHF4TUFiZEtsdz09

- Meeting-ID: 508 320 1475 Passwort: RLP_WS22
- Während der Vorlesung schalten Sie bitte Kamera sowie Mikrofon aus. Fragen? Bitte schreiben Sie im „Chat“.
- Nach der Vorlesung wird das aufgenommene Video hochgeladen.

Passwort: LA_WS2223

Vorlesung

- Wir folgen hauptsächlich dem Skript von Dr. Tobias Meng.

Literatur:

- T. Meng, *Rechenmethoden für Lehramt Physik*: Skript.
- M. Otto, *Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr* (Spektrum, 2011).
- W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1 – Klassische Mechanik* (Springer, 2002), erste ca. 100 Seiten.
- A. Altland und J. von Delft, *Mathematics for Physicists: Introductory Concepts and Methods* (Cambridge, 2019), in englischer Sprache.
- S. Grossmann, *Mathematischer Einführungskurs für die Physik* (Vieweg+Teubner, 2004).
- C. B. Lang und N. Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik* (Elsevier/Spektrum, 2005).
- L. Papula, *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Band 1, Band 2, Klausur- und Übungsaufgaben* (Vieweg+Teubner, 2009/10/12).
- H. Schulz, *Physik mit Bleistift: Einführung in die Rechenmethoden der Naturwissenschaften* (Harri Deutsch, 2006).

Übung

Übungsgruppe	Termin	Raum	Tutor/Tutorin
1	Mo. 3.DS (11:10 - 12:40)	SE2/203	K. Müller
2	Mo. 4.DS (13:00 - 14:30)	SE2/203	R. Hartmann
3	Mi. 5.DS (14:50 - 16:20)	SE2/102	S. Klempahn
4	Mi. 6.DS (16:40 - 18:10)	SE2/103	N. Albert
5	Mi. 6.DS (16:40 - 18:10)	SE2/123	D. Ryndyk
6	Do. 5.DS (14:50 - 16:20)	SE2/103	R. Hartmann
7	Fr. 1.DS (07:30 - 09:00)	BZW/A120	M. Weisswange

- Erste Übung: die zweite Vorlesungswoche (17. - 21.10.2022)
- Einschreibung: OPAL
- Bitte tragen Sie sich aus, wenn Sie die Übung nicht mehr teilnehmen wollen.

Übung

Bonuspunkt:

2x Vorrechnen in den Übungsgruppen → 6 Bonuspunkte

Klausur

Bonuspunkt:

2x Vorrechnen in den Übungsgruppen → 6 Bonuspunkte

- Gesamtpunktzahl für die Klausur beträgt 60 Punkte.
- 60 Punkte in Klausur + eventuell 6 Bonuspunkte = 66 Punkte
- Zum bestanden werden 30 Punkte benötigt.

Noch Fragen oder Rückmeldung?

- Sprechstunde: Dienstag, 10:30 – 11:30, BZW/A410 (Termin bevorzugt)
- E-Mail
- OPAL Forum

Viel Erfolg bei Ihrem Studium!

§ 1. Vektoralgebra

- Skalar gegen Vektor:

  - Viele physikalische Größen werden durch eine Zahl und eine Einheit beschrieben.

    Skalar

    Beispiele: Masse, Energie…

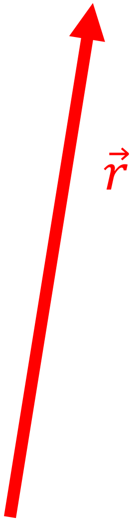
  - Neben der Zahl und der Einheit haben viele physikalische Größen auch eine Richtung.

    Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit…

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

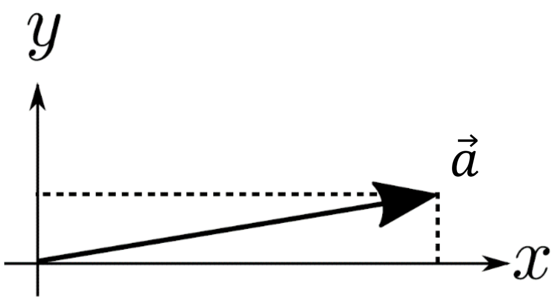
Weg von der TU Dresden zur Frauenkirche: ca. 3 km nach Norden

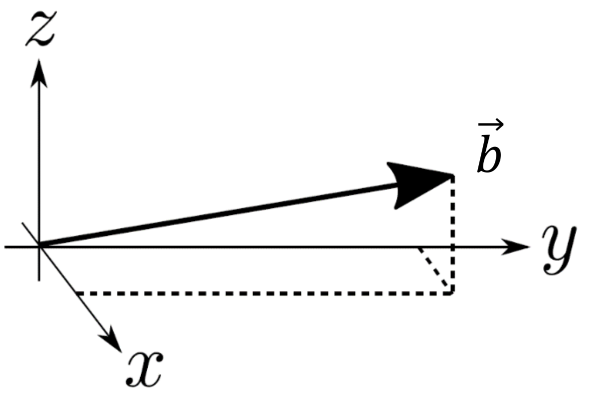
Vektor = „Länge x Richtung“



§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Definition durch kartesisches Koordinatensystem:



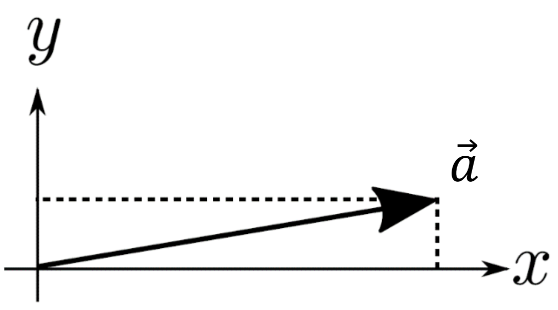


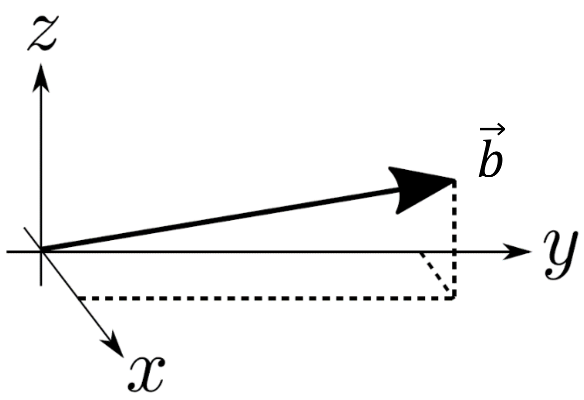
zwei Dimensionen: x- und y-Achse

drei Dimensionen: x-, y- und z- Achse

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Definition durch kartesisches Koordinatensystem:





zwei Dimensionen: x- und y-Achse

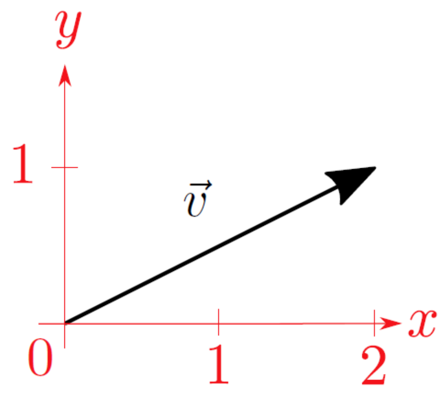
drei Dimensionen: x-, y- und z- Achse

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x\text{-Koordinate} \\ y\text{-Koordinate} \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x\text{-Koordinate} \\ y\text{-Koordinate} \\ z\text{-Koordinate} \end{pmatrix}$$

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

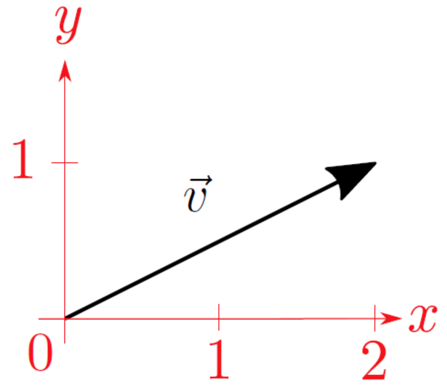
Beispiel:



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \text{x-Achsenabschnitt} \\ \text{y-Achsenabschnitt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Beispiel:



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \text{x-Achsenabschnitt} \\ \text{y-Achsenabschnitt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

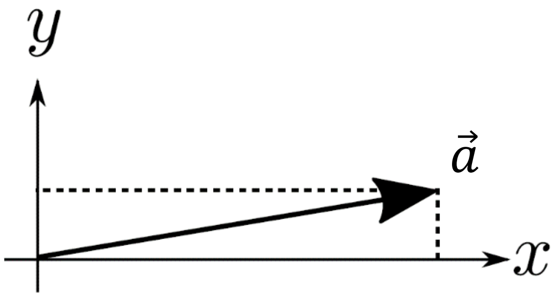
„Länge" des Vektors?

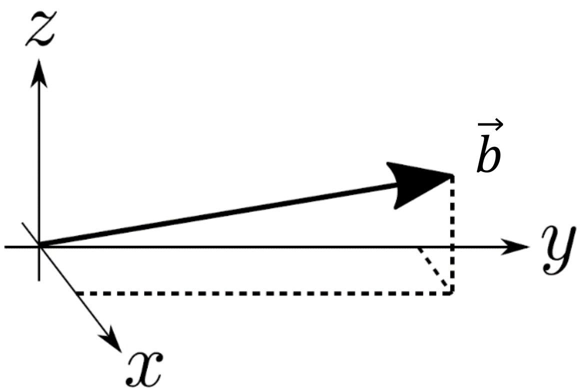
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Betrag (Norm) des Vektors

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Definition durch kartesisches Koordinatensystem:





zwei Dimensionen: x- und y-Achse

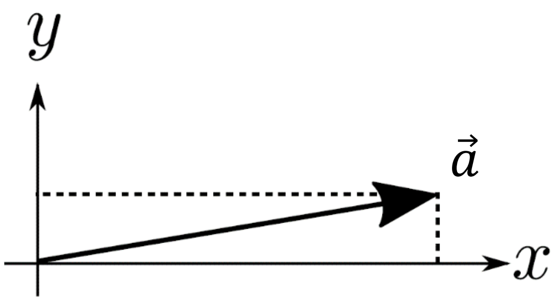
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

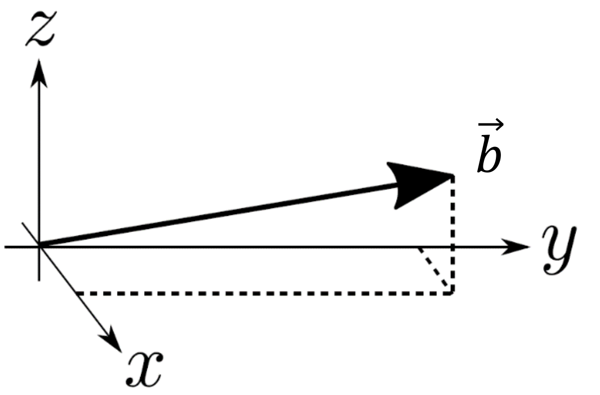
drei Dimensionen: x-, y- und z- Achse

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Definition durch kartesisches Koordinatensystem:





zwei Dimensionen: x- und y-Achse

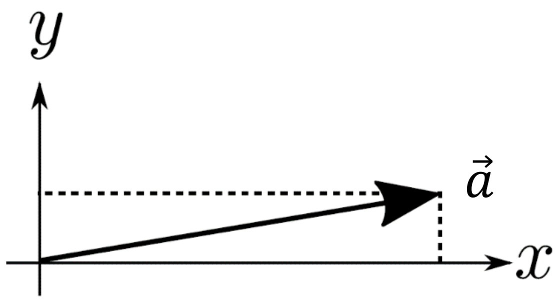
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

drei Dimensionen: x-, y- und z- Achse

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Nullvektor: $\vec{0}$

§ 1.1 Was ist ein Vektor?



Vektor = „Länge x Richtung"

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}_a$$

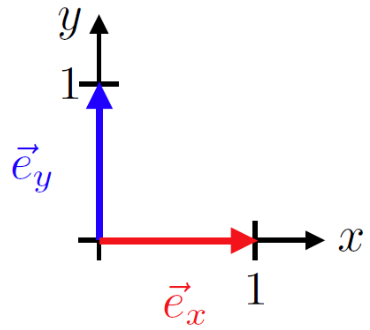
Richtung des Vektors: $$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

- $\vec{e}_a$ ist ein Einheitsvektor (Norm = 1).

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

- Basisvektor: Vektor mit Norm 1 in Richtung der Koordinatenachsen

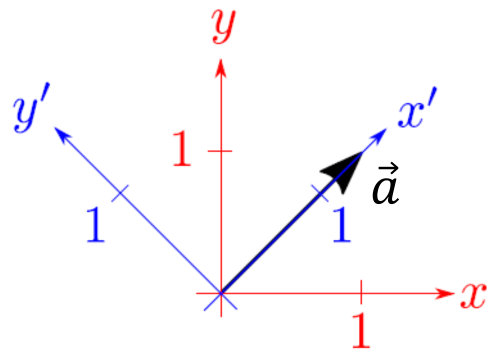
Beispiel: zwei Dimensionen



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \text{x-Achsenabschnitt} \\ \text{y-Achsenabschnitt} \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Verschiedene Koordinatensysteme:

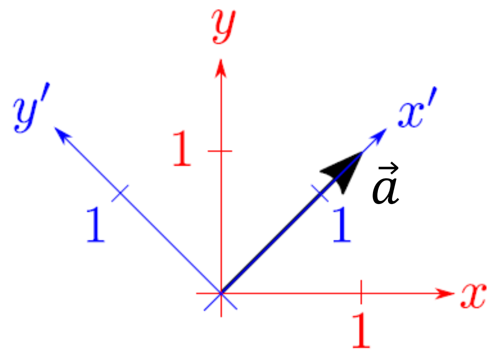


Koordinatensystem K: $\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatensystem K': $\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

§ 1.1 Was ist ein Vektor?

Verschiedene Koordinatensysteme:



Koordinatensystem K: $\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatensystem K': $\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

- Der Vektor hat gleiche Länge, aber die Darstellung (Zahlen in Spalte) ändern sich.

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Transposition:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}^{\,T} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

Spaltenvektor

Zeilenvektor

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ bilden ein Dreieck.

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar: einfach komponentenweise

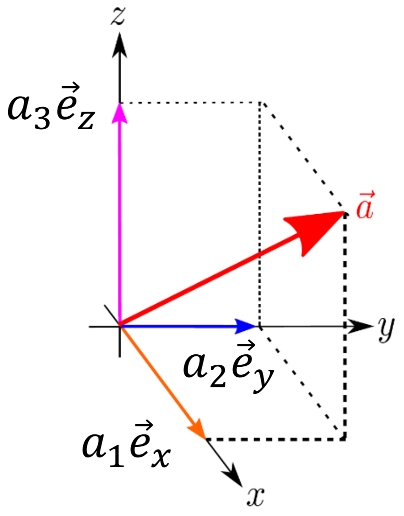
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{(reelle Zahl)}$$

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Ein wichtiges Beispiel: Zerlegung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Skalarprodukt von zwei Vektoren:

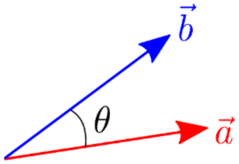
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Skalarprodukt von zwei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Geometrische Interpretation:



$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \cos(\theta)$$

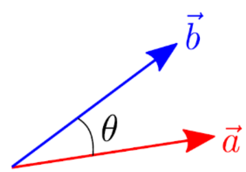
§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Skalarprodukt von zwei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Geometrische Interpretation:



$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \cos(\theta)$$

- Zwei Vektoren sind orthogonal zueinander: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

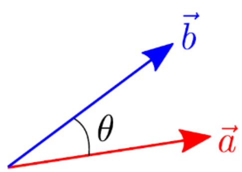
§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Skalarprodukt von zwei Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Geometrische Interpretation:



$$\Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \, |\vec{b}| \, \cos(\theta)$$

- Schwarzsche Ungleichung: $\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| \, \left|\vec{b}\right|$

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Kreuzprodukt von zwei Vektoren in drei Dimensionen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Kreuzprodukt von zwei Vektoren in drei Dimensionen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

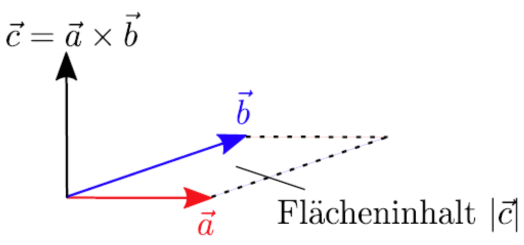
Kreuzprodukt von Basisvektoren: $\vec{e}_x \times \vec{e}_x = ?$ $\quad \vec{e}_x \times \vec{e}_y = ?$

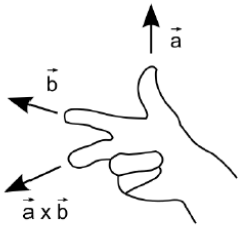
§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

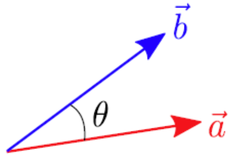
Kreuzprodukt von zwei Vektoren in drei Dimensionen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation:







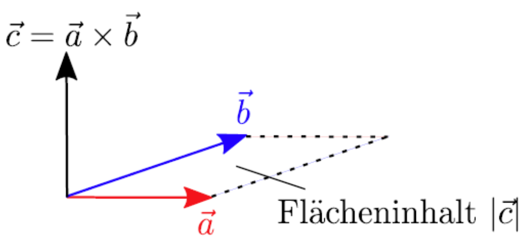
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \sin(\theta)$$

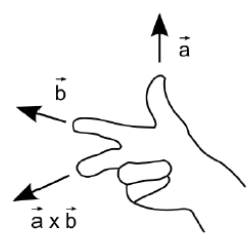
§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

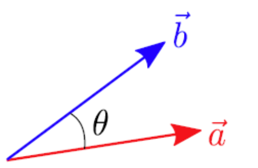
Kreuzprodukt von zwei Vektoren in drei Dimensionen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Geometrische Interpretation:







$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\theta)$$

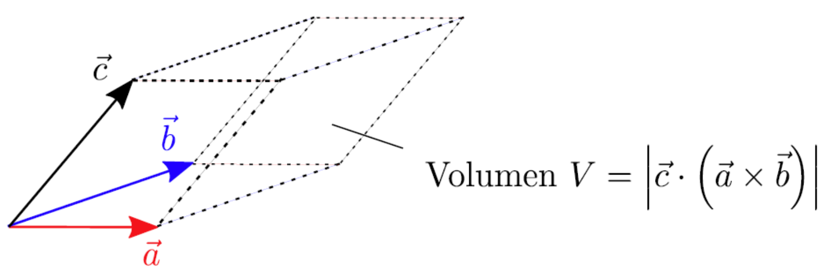
- Zwei Vektoren sind parallel zueinander: $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

§ 1.2 Rechenregeln für Vektoren

Spatprodukt von drei Vektoren in drei Dimensionen:

$$\text{Spatprodukt}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Geometrische Interpretation:



§ 1.3 Vektorraum

- Basis: eine Menge von Vektoren $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots\}$, die es erlauben, jeden beliebigen Vektor $\vec{a}$ als eindeutige Linearkombination der Basisvektoren zu schreiben.

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \cdots = \sum_{i=1,2,\dots} \alpha_i \, \vec{b}_i$$

§ 1.3 Vektorraum

- Orthonormalbasis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$

  - Die Vektoren sind orthogonal zueinander.

    $$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ wenn } i \neq j$$

  - Die Vektoren sind normiert.

    $$|\vec{e}_i| = 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

Beispiel: kartesische Standard-Basis $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$

§ 1.3 Vektorraum

- Die Vektoren einer Basis müssen nicht orthonormal sein.

- Um eine Basis zu bilden, müssen die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots$ linear unabhängig sein:

$$\sum_{i=1,2,\ldots} \alpha_i \, \vec{b}_i = 0$$ nur erfüllt werden kann, wenn all $\alpha_i = 0$.

§ 1.3 Vektorraum

- Die Vektoren einer Basis müssen nicht orthonormal sein.

- Um eine Basis zu bilden, müssen die Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots$ linear unabhängig sein:

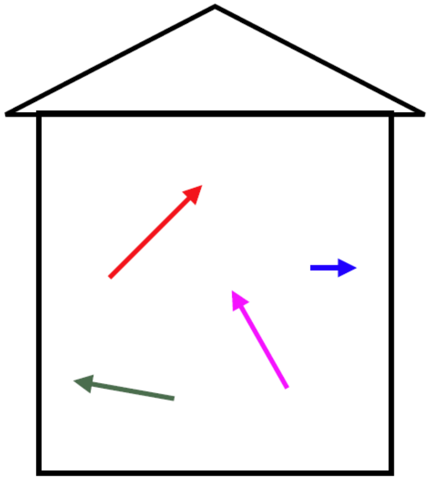
$$\sum_{i=1,2,\ldots} \alpha_i \, \vec{b}_i = 0$$ nur erfüllt werden kann, wenn all $\alpha_i = 0$.

Linear unabhängig oder linear abhängig?

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

§ 1.3 Vektorraum

Der Vektorraum: $V = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots\}$



- Die Vektoren sind die Elemente eines Vektorraum.
- Es gibt zwei Rechenoperationen: Vektoraddition + Skalare Multiplikation.

§ 1.3 Vektorraum

Eigenschaften:

1. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren in $\mathbb{V}$, so ist auch $\vec{a}+\vec{b}$ ein Vektor in $\mathbb{V}$. Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}$ gilt bezüglich der Vektoraddition ferner

   (a) Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

   (b) Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

   (c) Existenz des neutralen Elements: in $\mathbb{V}$ gibt es einen Vektor $\vec{0}$ so dass $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{V}$.

   (d) Existenz des inversen Elements: zu jedem $\vec{a} \in \mathbb{V}$ gibt es einen anderen Vektor $\vec{a}\,'$ in $\mathbb{V}$ so, dass $\vec{a} + \vec{a}\,' = \vec{0}$. (Wir schreiben dieses inverse Element als $\vec{a}\,' = -\vec{a}$).

§ 1.3 Vektorraum

Eigenschaften:

1. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren in $\mathbb{V}$, so ist auch $\vec{a}+\vec{b}$ ein Vektor in $\mathbb{V}$. Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}$ gilt bezüglich der Vektoraddition ferner
   (a) Assoziativgesetz: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.
   (b) Kommutativgesetz: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
   (c) Existenz des neutralen Elements: in $\mathbb{V}$ gibt es einen Vektor $\vec{0}$ so dass $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle $\vec{a} \in \mathbb{V}$.
   (d) Existenz des inversen Elements: zu jedem $\vec{a} \in \mathbb{V}$ gibt es einen anderen Vektor $\vec{a}\,'$ in $\mathbb{V}$ so, dass $\vec{a} + \vec{a}\,' = \vec{0}$. (Wir schreiben dieses inverse Element als $\vec{a}\,' = -\vec{a}$).

2. Ist $\vec{a}$ ein Vektor in $\mathbb{V}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ (reelle Zahl) , so ist auch $\alpha\vec{a}$ ein Vektor in $\mathbb{V}$. Für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ und beliebige Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt bezüglich der Multiplikation mit Skalaren außerdem:
   (a) Distributivgesetz bzgl. Vektoraddition: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.
   (b) Distributivgesetz bzgl. skalarer Addition: $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.
   (c) Kompatibilität der Skalarmultiplikation: $(\alpha\,\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$.
   (d) Neutralität der Skalarmultiplikation bzgl. der Eins: $1\vec{a} = \vec{a}$.