SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 11: Linienintegral

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

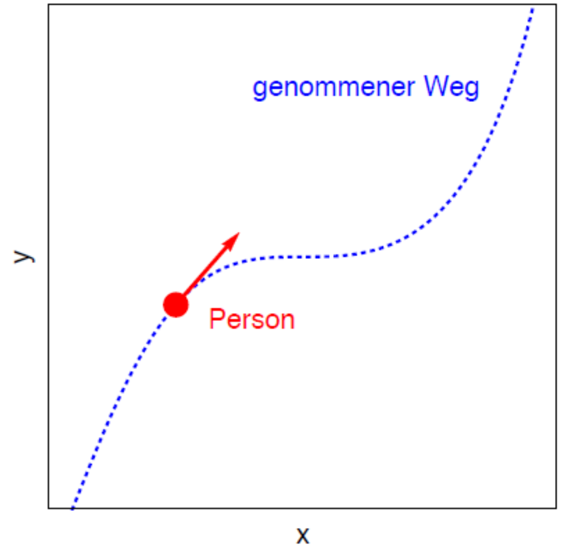
Dezember 19, 2022

Klausur

- Termin: 10.02.2023 (Freitag), 11:15 - 14:15. Raum: ZEU/250/Z
- Die Einschreibung erfolgt über HISQIS in Januar 2023.

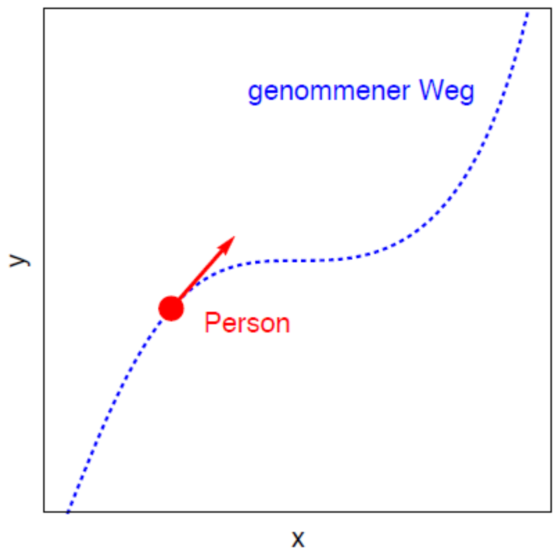
§ 7.1 Bahnkurven

- Bewegung eines Teilchens durch eine Bahnkurve:



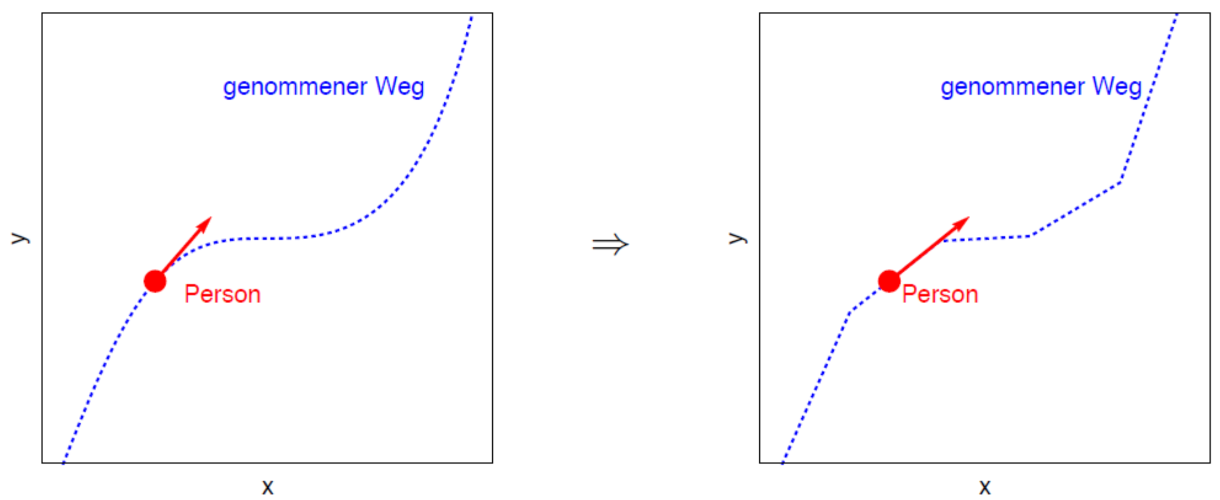
§ 7.2 Linienintegral

- Wie lange ist die Kurve?



§ 7.2 Linienintegral

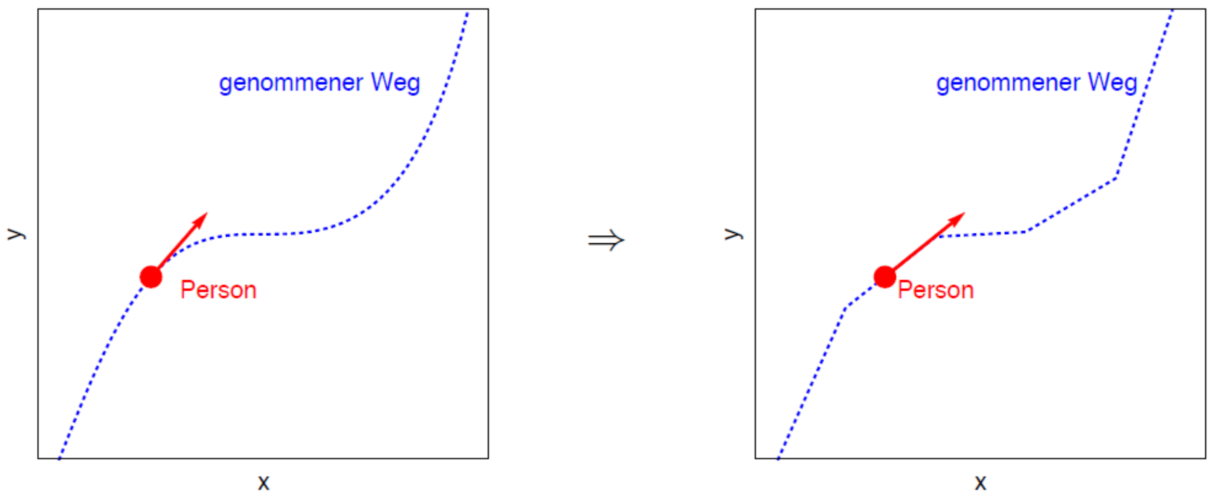
- Linienintegral: etwas auf einem Weg aufsammeln



zurückgelegte Strecke $\approx \sum_i \Delta l_i$

§ 7.2 Linienintegral

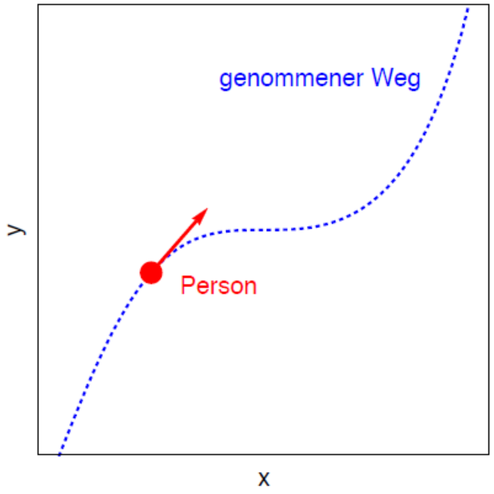
- Linienintegral: etwas auf einem Weg aufsammeln



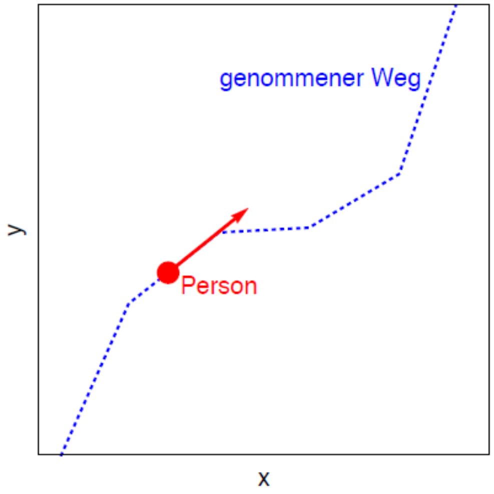
zurückgelegte Strecke $= \lim_{\text{alle } \Delta l_i \to 0} \sum_i \Delta l_i = \int_{\text{Weg}} dl$

§ 7.2 Linienintegral

- Linienintegral: etwas auf einem Weg aufsammeln



$\Rightarrow$



zurückgelegte Strecke $= \lim_{\text{alle } \Delta l_i \to 0} \sum_i \Delta l_i = \int_{\text{Weg}} \underline{dl}$

Differential der Strecke

§ 7.2 Linienintegral

- Um solch ein Linienintegral zu berechnen, müssen wir den Weg parametrisieren.

zurückgelegte Strecke $= \lim_{\text{alle } \Delta l_i \to 0} \sum_i \Delta l_i = \int_{\text{Weg}} dl$

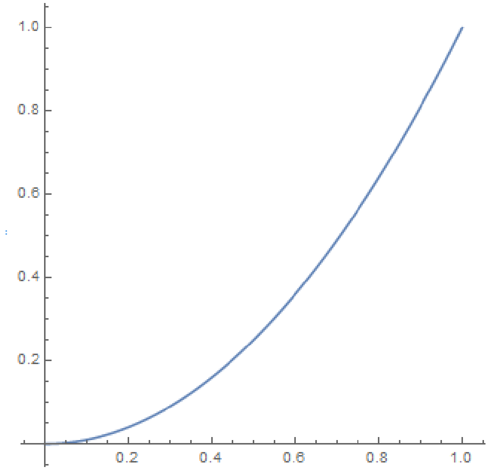
Differential der Strecke

$$\Delta l_i = (\text{Weg pro Zeit}) \text{ mal Zeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \cdot \text{Zeit} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Zeit} = |\vec{v}_i| \, \Delta t_i$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\int_{\text{Weg}} dl = \int_{\text{Zeit, die Weg braucht}} |\vec{v}(t)| \, dt = \int_{\text{Zeit, die Weg braucht}} \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| dt} = \lim_{\text{alle } \Delta t_i \to 0} \sum_i |\vec{v}_i| \, \Delta t_i$$

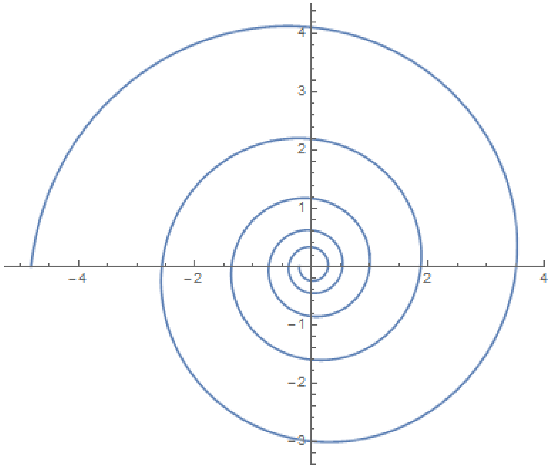
§ 7.2 Linienintegral

Beispiel 1: $y = x^2,\ x \in [0,1]$



§ 7.2 Linienintegral

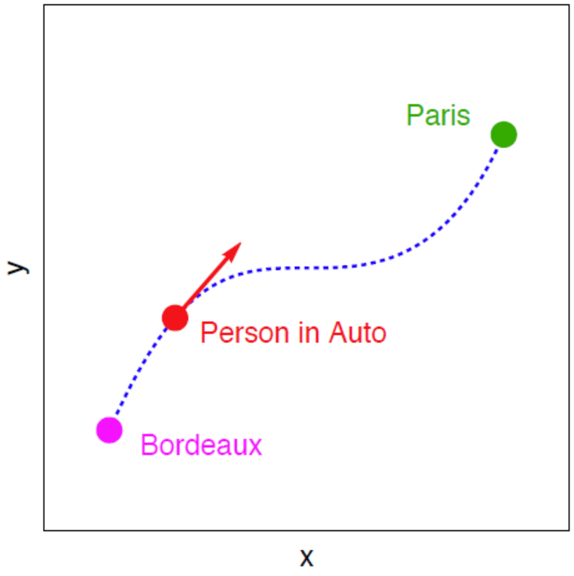
Beispiel 2: $\vec{r}(t) = \left(e^{t/10}\cos(t), e^{t/10}\sin(t)\right)^T,\ t \in [-5\pi, 5\pi]$



Logarithmische Spirale

§ 7.2 Linienintegral

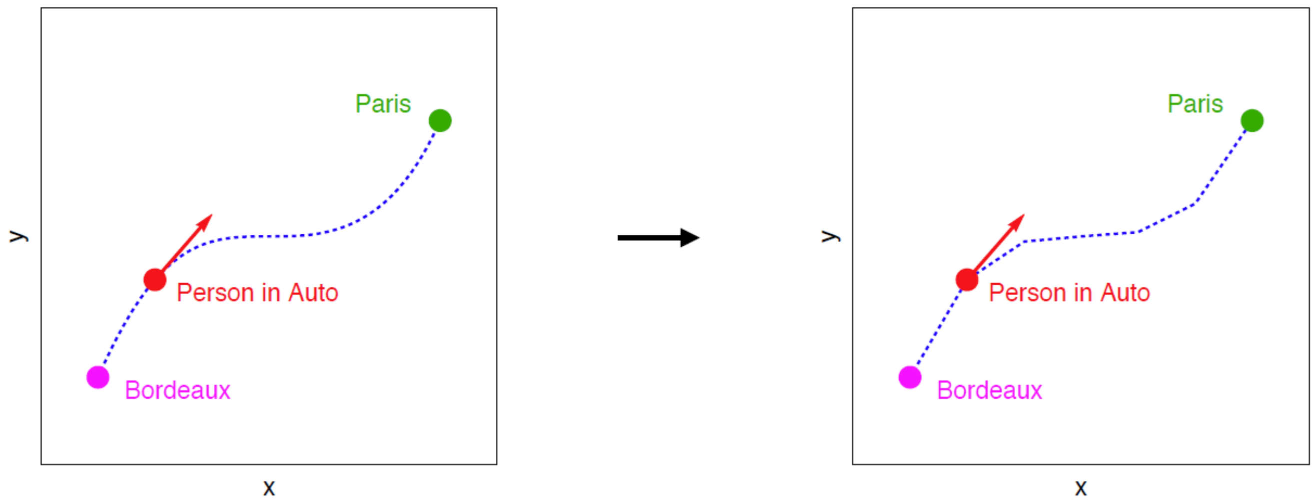
- Linienintegral einer Skalaren Funktion:



Wie viel Fahrtkosten?

§ 7.2 Linienintegral

- Linienintegral einer Skalaren Funktion:



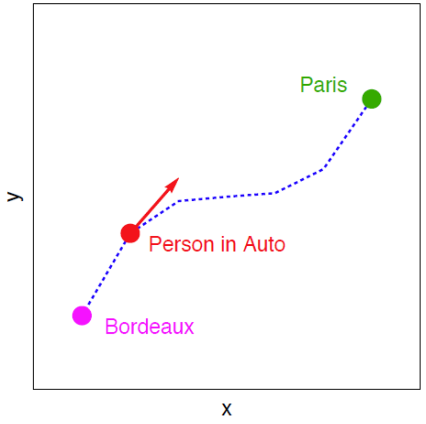
$$\text{Gesamtkosten} = \sum_i \text{Kosten auf dem } i\text{-ten Teilstück}$$

§ 7.2 Linienintegral

Gesamtkosten = $\sum_i$ Kosten auf dem *i*-ten Teilstück

= $\sum_i$ (Kosten pro Kilometer) * (Länge des *i*-ten Teilstücks)

$$\approx \sum_i K(\vec{r}_i)\,\Delta l_i = \sum_i K(\vec{r}_i)\,|\vec{v}_i|\,\Delta t_i$$

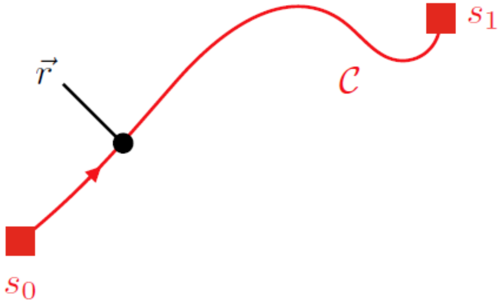


Gesamtkosten als Linienintegral:

$$\text{Gesamtkosten} = \lim_{\text{alle } \Delta t_i \to 0} \sum_i K(\vec{r}_i)\,|\vec{v}_i|\,\Delta t_i = \int_{\text{Bordeaux}\to\text{Paris}} K\,dl = \int_{t_0}^{t_1} K(\vec{r}(t))\,|\vec{v}(t)|\,dt$$

§ 7.2 Linienintegral

- Linienintegral eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r}, t)$



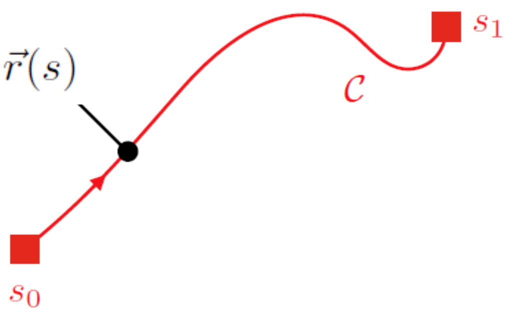
§ 7.2 Linienintegral

- Linienintegral eines skalaren Feldes $\phi(\vec{r}, t) \to \phi(\vec{r}(s), t)$

  - Parametrisiere Weg: $\mathcal{C}$: $\vec{r}(s)$

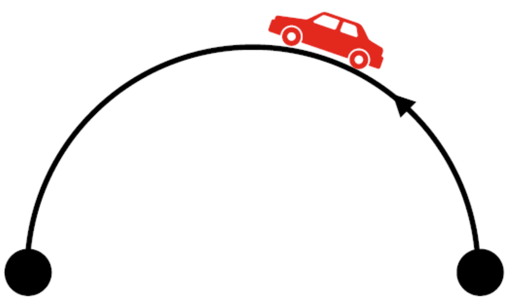
  - Bilde Linienintegral:

$$\int_{\mathcal{C}} |d\vec{r}| \; \phi(\vec{r}, t) = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| \phi(\vec{r}(s), t) \, ds$$



§ 7.2 Linienintegral

Beispiel: Was sind die Fahrtkosten entlang eines Halbkreises mit Radius 10 km, wenn die Kosten pro Kilometer 10 Euro betragen?



- Parametrisiere Weg:

$$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} r\ \cos(s) \\ r\ \sin(s) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = 10\ \text{km}$$

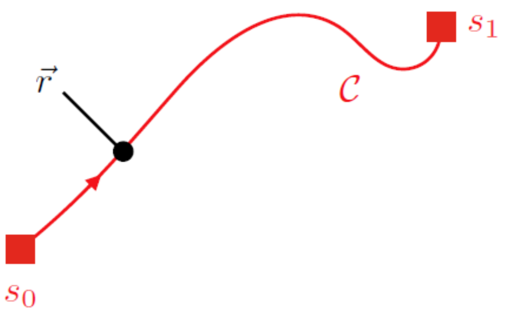
- Bilde Linienintegral:

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \begin{pmatrix} -r\ \sin(s) \\ r\ \cos(s) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \sqrt{r^2\ \sin(s)^2 + r^2\ \cos(s)^2} = r = 10\,\text{km}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \left|\frac{d\vec{r}(s)}{ds}\right| \phi(\vec{r}(s), t)\, ds \rightarrow \int_0^{\pi} ds\, 10\,\text{km} \times 10\,\frac{\text{Euro}}{\text{km}} = 100\,\text{Eur0} \int_0^{\pi} ds = 100\,\pi\,\text{Euro}$$

§ 7.2 Linienintegral

- Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}, t)$



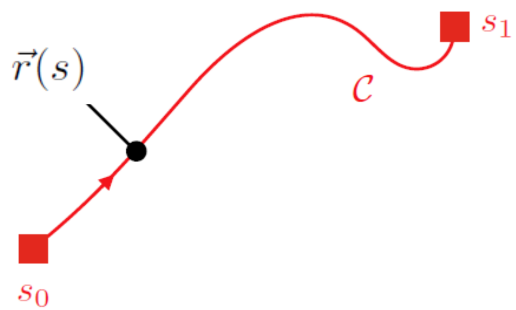
§ 7.2 Linienintegral

- Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r},t) \rightarrow \vec{A}(\vec{r}(s),t)$

  - Parametrisiere Weg: $\mathcal{C}$: $\vec{r}(s)$

  - Bilde Linienintegral:

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int_{s_0}^{s_1} ds \, \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \vec{A}(\vec{r}(s),t)$$



Beispiel: „Arbeit ist Kraft mal Weg“

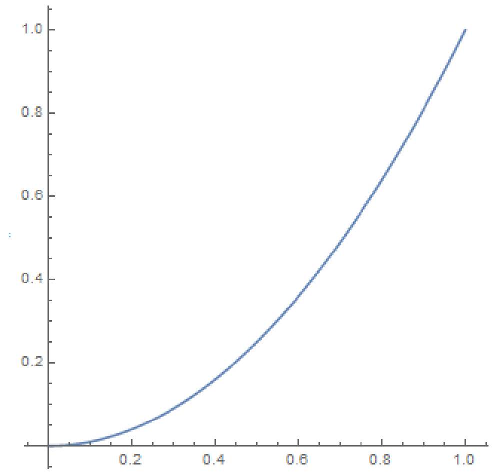
$$E = \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

§ 7.2 Linienintegral

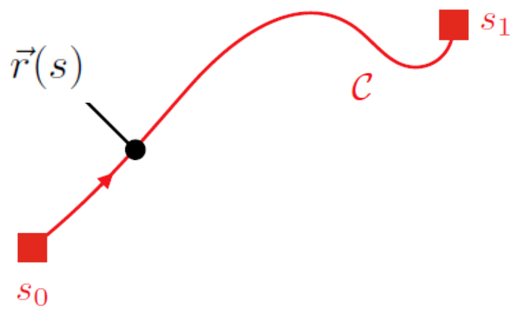
Beispiel: $y = x^2,\ x \in [0,1]$

$$\vec{F}(\vec{r}) = 2\vec{r}$$

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = ?$$



§ 7.2 Linienintegral



$$\int_{\mathcal{C}} |d\vec{r}| \; \phi(\vec{r},t) = \int_{s_0}^{s_1} \left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| \phi(\vec{r}(s),t)\, ds$$

skalares Feld

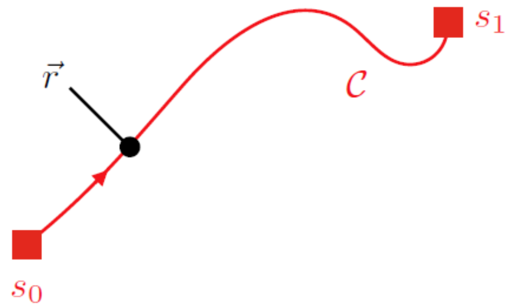
$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int_{s_0}^{s_1} ds \, \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \cdot \vec{A}(\vec{r}(s),t)$$

Vektorfeld

§ 7.3 Oberflächenintegral

- Linienintegral eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

„Integral des Feldes entlang einer Linie“



- Oberflächenintegral eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r}, t)$:

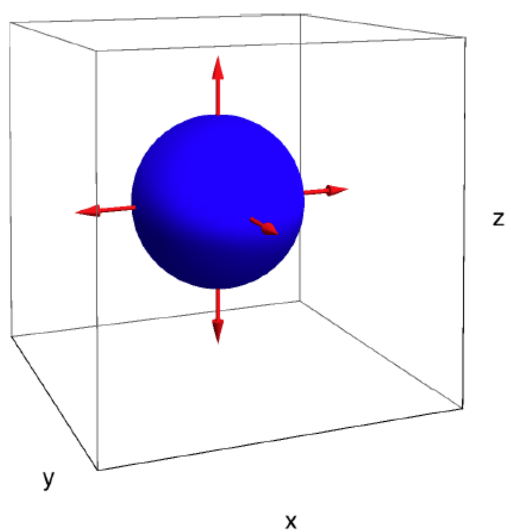
„Integral des Feldes über eine Fläche“

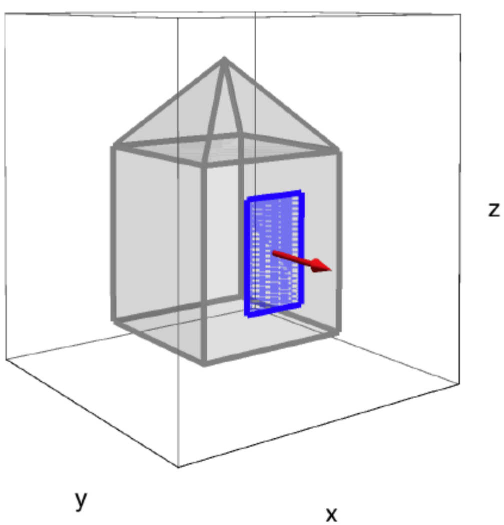
§ 7.3 Oberflächenintegral

Wichtiger Baustein für Oberflächenintegral: Orientierung der Fläche

Orientierung einer Fläche: festlegen, was „außen“ ist

Flächennormalenvektor: Einheitsvektor, $\vec{n}$ der nach außen zeigt





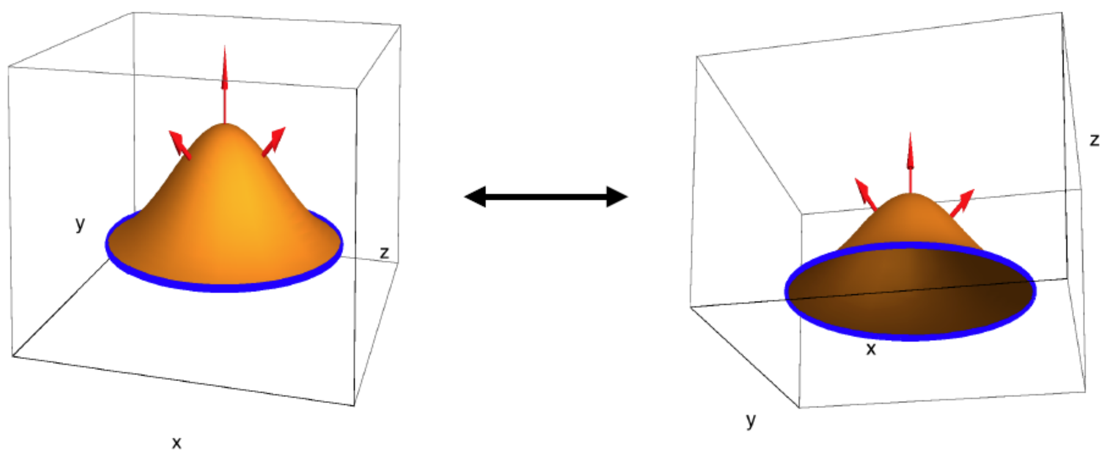
§ 7.3 Oberflächenintegral

Wichtiger Baustein für Oberflächenintegral: Orientierung der Fläche

Orientierung einer Fläche: festlegen, was „außen“ ist

Flächennormalenvektor: Einheitsvektor, $\vec{n}$ der nach außen zeigt

Achtung: nicht eindeutig (nach oben oder nach unten?) - freie Wahl!



§ 7.3 Oberflächenintegral

- Wie können wir den Flächennormalenvektor bestimmen?

2D: Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_{\parallel}$

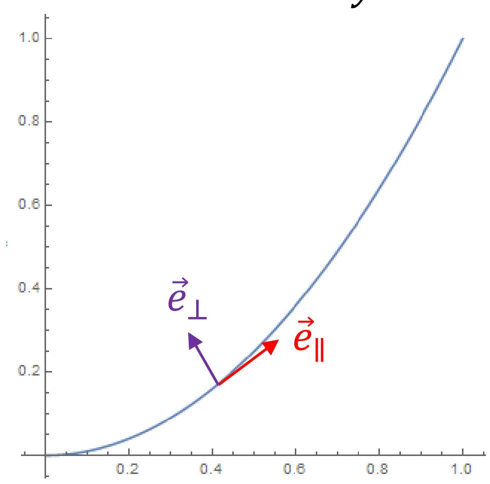
Normaleneinheitsvektor $\vec{e}_{\perp}$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{r}_{\parallel}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\parallel} = \frac{\vec{r}_{\parallel}(t)}{|\vec{r}_{\parallel}(t)|}$$

$$\vec{e}_{\perp} \cdot \vec{e}_{\parallel} = 0$$

$y = x^2$

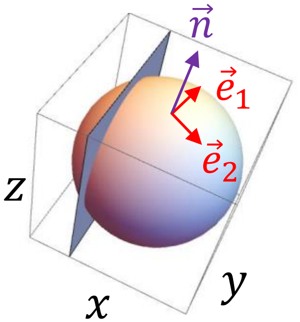


§ 7.3 Oberflächenintegral

- Wie können wir den Flächennormalenvektor bestimmen?

3D: Tangenteneinheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$

Flächennormalenvektor $\vec{n}$



$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial_u \vec{r}(u,v)}{|\partial_u \vec{r}(u,v)|}$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\partial_v \vec{r}(u,v)}{|\partial_v \vec{r}(u,v)|}$$

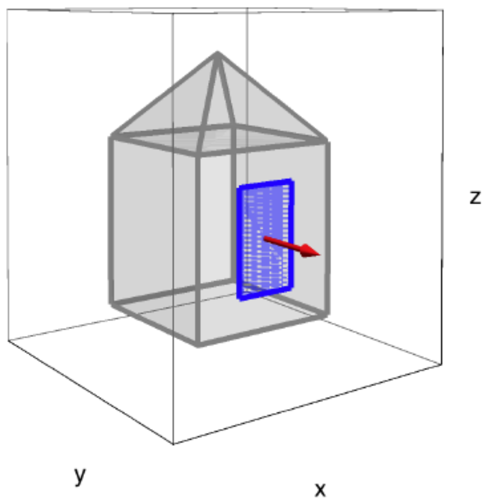
$$\vec{r}(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

§ 7.3 Oberflächenintegral

- Das Oberflächenintegral:

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \int dS\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$



Berechnung: über verschachtelte „normale“ Integrale und Stammfunktionen