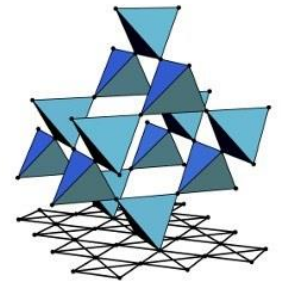




TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

DRESDEN
concept



SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 12: Integralsätze + Differentialgleichung

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

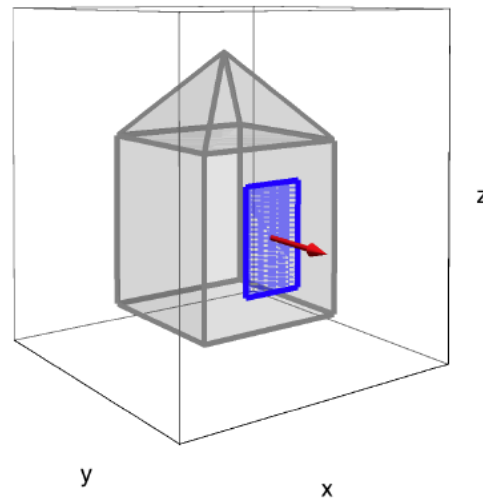
E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Januar 9, 2023

§ 7.3 Oberflächenintegral

- Das Oberflächenintegral:

$$\int d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \int dS \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

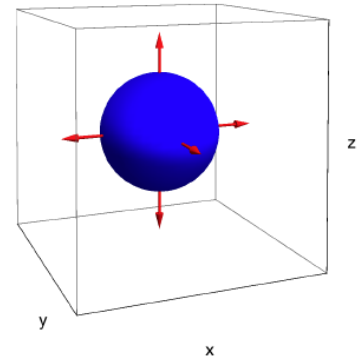


Berechnung: über verschachtelte „normale“ Integrale und Stammfunktionen

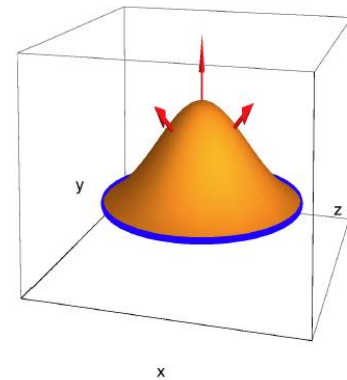
§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- Oberflächen und ihr Rand:

- geschlossene Oberfläche: hat keinen Rand



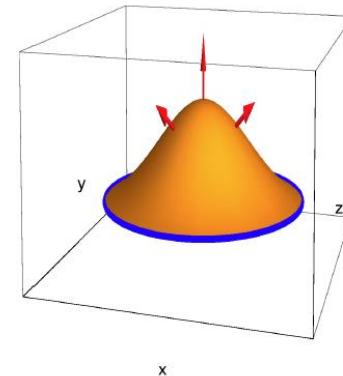
- nicht-geschlossene Oberfläche: hat Rand



§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

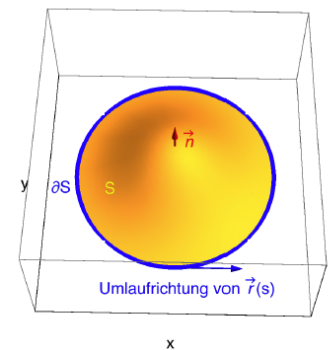
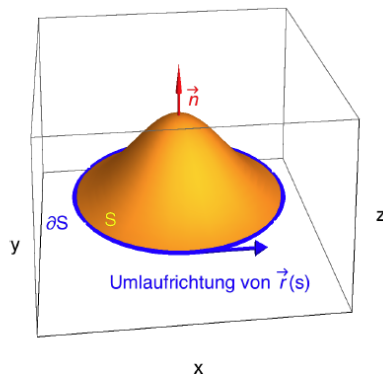
- Oberflächen und ihr Rand:
 - nicht-geschlossene Oberfläche: hat Rand

Oberfläche S  Rand ∂S



Umlaufrichtung für Pfad entlang des Randes: **rechte-Hand-Regel**

von oben schauend gegen Uhrzeigersinn = „mathematisch positiv“



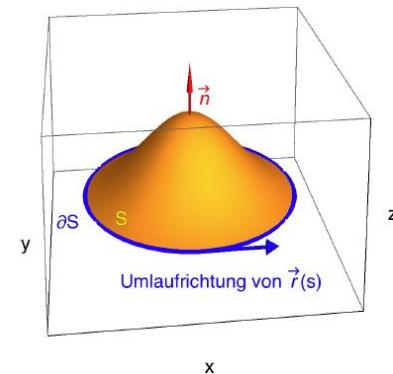
§ 7.4 Integralsätze von Gauß und Stokes

- **Satz von Gauß:** verbindet **Volumenintegral** und **Oberflächenintegral**

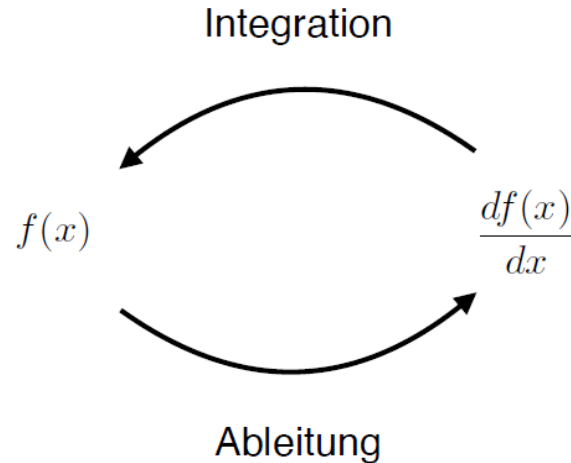
$$\int_V dV \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = \int dS \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

- **Satz von Stokes:** verbindet **Oberflächenintegral** und **Linienintegral**

$$\int_S d\vec{S} \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t)] = \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$



§ 8. Differentialgleichung



$$f(x) = e^{5x} \Leftrightarrow \frac{df(x)}{dx} = f'(x) = 5 \underbrace{e^{5x}}_{=f(x)} = \underline{5 f(x)}$$

- Differentialgleichung (DGL): Gleichung für gesuchte Funktion, in der auch Ableitungen der Funktion vorkommen


§ 8. Differentialgleichung

Beispiele:

$$f'(x) = 5f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = -f(x)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 7$$


$$f(x) = -38323$$

$$f(x) = -\frac{\ln(\pi^{0.373})}{18.3}$$

Ohne extra-Infos („Randbedingungen“): DGLs haben keine eindeutige Lösung!

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Gewöhnliche vs. partielle DGL:
 - **gewöhnliche** DGL: Funktion hängt nur von **einer** Variablen ab

$$f'(x) + 449.9 f(x)^5 + \cos(x) = 7$$

- **partielle** DGL: Funktion hängt von **mehreren** Variablen ab
DGL enthält **verschiedene partielle Ableitungen**


$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 \rho(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho(\vec{r}, t)}{\partial z^2} \right)$$

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Ordnung einer DGL: **Grad der höchsten Ableitung**


$$\frac{df(x)}{dx} = 5 f(x)$$

DGL 1. Ordnung



$$\frac{df(x)}{dx} = 5 f(x) + \frac{d^4 f(x)}{dx^4}$$

DGL 4. Ordnung



§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

- Homogene vs. inhomogene DGL:
 - **homogene** DGL: alle Terme der DGL enthalten die Funktion oder ihre Ableitungen

$$f'(x) = 5 f(x)$$

- **inhomogene** DGL: es gibt Terme, die nicht die Funktion enthalten

The diagram shows the differential equation $f'(x) = 5 f(x) + x^3$. Below the equation, three annotations are present: 'Ableitung der Funktion' with an arrow pointing to $f'(x)$; 'Funktion' with an arrow pointing to $f(x)$; and 'weder noch' with a red arrow pointing to the x^3 term, which is underlined in red.

$$f'(x) = 5 f(x) + x^3$$

Ableitung der Funktion Funktion weder noch

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen


- Allgemeine lineare DGL:
 - **Lineare** DGL: Funktion und Ableitung kommt nur in 1. Potenz vor

Beispiel: $f'(x) = 5 f(x)$

Gegenbeispiel: $f'(x) + \underline{449.9 f(x)^5} + \cos(x) = 7$

- **Allgemeine** lineare DGL n -ter Ordnung:

$$a_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{df(x)}{dx} + a_0(x) f(x) = \underline{b(x)}$$


 $b(x) = 0$ homogene

$b(x) \neq 0$ inhomogene

§ 8.1. Grundbegriffe von Differentialgleichungen

Beispiele:

$$f(x) = -89 : \text{gewöhnliche inhomogene DGL 0. Ordnung}$$

$$f'(x) - 38f'''(x) = f''(x) : \text{gewöhnliche homogene DGL 3. Ordnung}$$


$$\frac{df(x, y)}{dx} + \frac{df(x, y)}{dy} = -f(x, y) + 7 : \text{partielle inhomogene DGL 1. Ordnung}$$

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

$$f'(x) = 5f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{5x}$$

$$f'(x) = -f(x)^2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 7$$


$$f(x) = -38323$$

$$f(x) = -\frac{\ln(\pi^{0.373})}{18.3}$$

Ohne extra-Infos („Randbedingungen“): DGLs haben **keine eindeutige Lösung!**

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

$$f'(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \underline{c}$$

Allgemeine Lösung: Alle Konstanten sind erlaubt.

Die Lösung ist **eindeutig**, wenn wir eine sogenannte „**Randbedingung**“ festlegen, z.B. $f(0) = 1$.

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

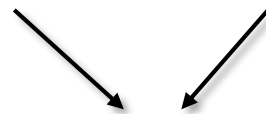
- Eine **gewöhnliche DGL n -ter Ordnung** braucht **n Randbedingungen**, damit die Lösung eindeutig festgelegt werden kann.

$$a_n(x) \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{df(x)}{dx} + a_0(x) f(x) = b(x)$$

unabhängige Lösungen: $f_1(x), \dots, f_n(x)$



$$f_{\text{allg.}} = \underline{c_1} f_1(x) + \dots + \underline{c_n} f_n(x)$$



durch Randbedingungen festgelegt, z.B. $f(x_1), \dots, f(x_n)$

§ 8.2. Eindeutigkeit der Lösung einer DGL und Rolle von Randbedingungen

Beispiel:

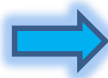
$$f''(x) = -f(x)$$

$$f(0) = 0 \text{ und } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \text{ (Randbedingungen)}$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
 - Raten: Die DGLs in der Physik sehen oft ähnlich aus.

$$f'(x) = \alpha f(x) \text{ (mit } \alpha \in \mathbb{R}\text{)}$$



$$f(x) = c_0 e^{\alpha x}$$

$$f''(x) = -\alpha f(x) \text{ (mit } \alpha > 0\text{)}$$



$$f(x) = c_1 \sin(\sqrt{\alpha} x) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha} x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
 - Lösung durch Integration:

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} = g(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?
 - Trennung der Variablen:

$$\frac{df(x)}{dx} = g(x) h(f(x))$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f'(x) = x^2 f(x)$


§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?


➤ Exponentialansatz:

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x}$

 $\underline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$

n Lösungen für $\lambda!$

 $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f''(x) - 3f'(x) + 2f(x) = 0$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

➤ Exponentialansatz:

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

Ansatz: $f(x) = e^{\lambda x}$



$$\underline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0}$$

n Lösungen für λ !

Vorsicht bei Entartungen (z.B. $\lambda_1 = \lambda_2$)!

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$