TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 13: Differentialgleichung + Komplexe Zahlen

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Januar 16, 2023

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene Differentialgleichungen:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = \underline{b(x)}$$

Löse zunächst die entsprechende homogene DGL!

$$a_n(x)\,\frac{d^n f_{\text{allg. hom.}}(x)}{dx^n} + \ldots + a_0(x)\,f_{\text{allg. hom.}}(x) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg. hom.}} = c_{1,\text{hom.}}\,f_{1,\text{hom.}}(x) + \ldots + c_{n,\text{hom.}}\,f_{n,\text{hom.}}(x)$$

Finde/Rate eine spezielle Lösung $f_{\text{spez.}}(x)$ der inhomogenen DGL!

$$\Rightarrow \quad f_{\text{allg. inhom.}}(x) = f_{\text{allg. hom.}}(x) + f_{\text{spez.}}(x)$$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f'(x) - f(x) = e^{2x}$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Inhomogene lineare Differentialgleichungen: Variation der Konstanten

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = b(x)$$

Löse zuerst die homogene DGL:

$$a_1(x)\,\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)\,f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1\,f_1(x)$$

Ersetze die Konstante c_1 durch eine Funktion $c_1(x)$.

Verwende den Ansatz $c_1(x)f_1(x)$ für die inhomogene DGL und bestimmen $c_1(x)$.

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

Beispiel: $f'(x) - f(x) = e^{2x}$

§ 8.3. Lösungen der gewöhnlichen DGL

- Wie löst man eine Differentialgleichung?

  - Reduktion der Ordnung:

$$a_n(x)\,\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_m(x)\,\frac{d^m f(x)}{dx^m} = b(x) \qquad (n > m)$$

Substitution: $g(x) = \frac{d^m f(x)}{dx^m}$

$$\Rightarrow \quad a_n(x)\,\frac{d^{n-m} g(x)}{dx^{n-m}} + a_{n-1}(x)\,\frac{d^{n-m-1} g(x)}{dx^{n-m-1}} + \ldots + a_m(x)\,g(x) = b(x)$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = A\,\vec{y}(x)$$

$(n \times n)$-Matrix

Beispiel: $\frac{df(x)}{dx} = h(x) \qquad \frac{dh(x)}{dx} = g(x) \qquad \frac{dg(x)}{dx} = 2\,f(x) - g(x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} f(x) \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) \\ h(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underline{A}\,\vec{y}(x)$$

$(n \times n)$-Matrix

Wie löst man diese gekoppelte Differentialgleichungen?

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underbrace{A}_{(n \times n)\text{-Matrix}}\, \vec{y}(x)$$

Bestimme die Eigenwerte α_i und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{a}_i$ von A:

$$A\,\vec{a}_i = \alpha_i\,\vec{a}_i$$

Allgemeine Lösung: $\vec{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{c_i}_{\text{Konstanten}}\, e^{\alpha_i x}\,\vec{a}_i$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

- Gekoppelte lineare Differentialgleichungen:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \underline{A}\,\vec{y}(x) \qquad\qquad A\,\vec{a}_i = \alpha_i\,\vec{a}_i$$

$(n \times n)$-Matrix

Beweis mit Ähnlichkeitstransformation von A:

$$S^{-1}AS = \Lambda = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad\qquad S = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$$

§ 8.4. Gekoppelte Differentialgleichungen

Beispiel:
$$f'(x) = 2f(x) + g(x)$$
$$g'(x) = f(x) + 2g(x)$$

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: Erweiterung der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$

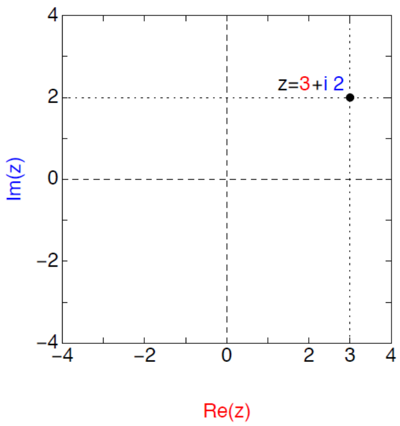
$$z = x + \underline{i}\, y \qquad x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}$$

Imaginäre Einheit $\quad i^2 = -1$

Realteil & Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

$$\mathrm{Im}(z) = y$$

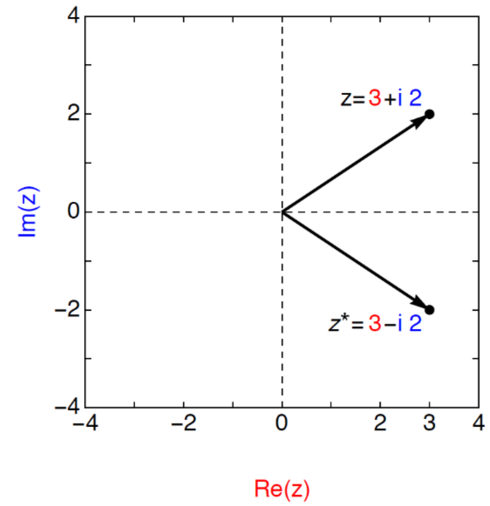


§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Komplexe Konjugation:

$$z = x + i\,y \quad \Rightarrow \quad z^* = x - i\,y$$

$x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$



Betrag: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Rechenregeln:

  - Addition/Subtraktion:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + i\,y_1) \pm (x_2 + i\,y_2) = (x_1 \pm x_2) + i\,(y_1 \pm y_2)$$

  - Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (x_1 + i\,y_1) \cdot (x_2 + i\,y_2) &= x_1\,x_2 + i\,y_1\,x_2 + i\,x_1\,y_2 + i^2\,y_1\,y_2 \\ &= (x_1\,x_2 - y_1\,y_2) + i(x_1\,y_2 + y_1\,x_2) \end{aligned}$$

  - Division:

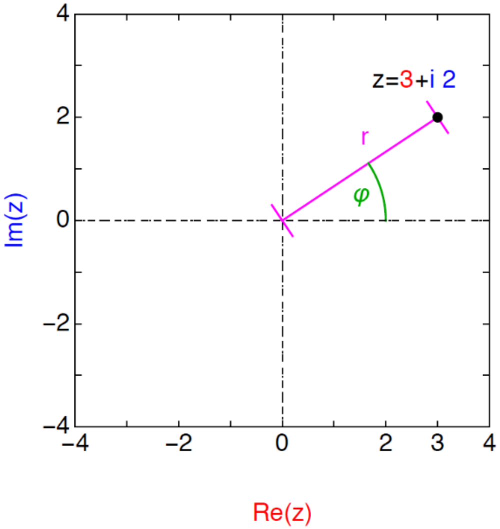
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + i\,y_1}{x_2 + i\,y_2} = \frac{(x_1 + i\,y_1)\,(x_2 - i\,y_2)}{(x_2 + i\,y_2)\,(x_2 - i\,y_2)} = \frac{x_1\,x_2 + y_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1\,x_2 - x_1\,y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Komplexe Zahlen in Polarform:

$$z = x + iy$$

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Betrag: $r = |z|$

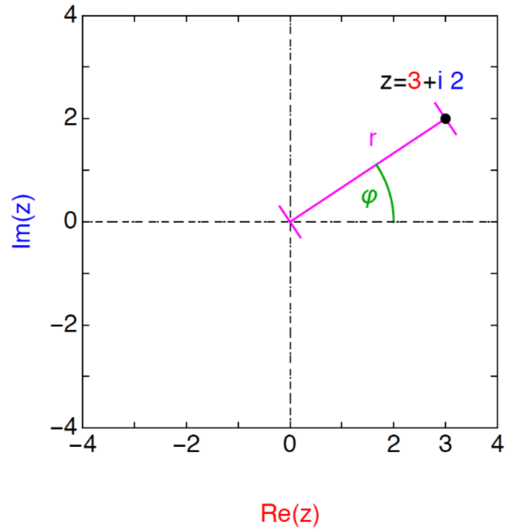
Argument $\varphi = \arg(z) \in [0,2\pi)$

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Komplexe Zahlen in Polarform:

$$z = x + iy$$

$$= r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Betrag: $r = |z|$

Argument $\varphi = \arg(z) \in [0,2\pi)$

Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ⇒ $z = |z|e^{i\varphi}$

Euler-Formel: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Beweis mit Taylorreihe…

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Rechenregeln mit Polarform:

  - Multiplikation:

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} \cdot |z_2| e^{i\varphi_2} = |z_1||z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

  - Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

  - Potenz

$$z^n = \left(|z| e^{i\varphi}\right)^n = |z|^n e^{in\varphi} \qquad n \in \mathbb{N}$$

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Rechenregeln mit Polarform:

  - Wurzel:

$$\sqrt{z} = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^{1/2} = \pm|z|^{1/2}e^{i\varphi/2}$$

  - Logarithmus:

$$\log(z) = \log(|z|e^{i\varphi}) = \log|z| + i\varphi \qquad \varphi \in [0,2\pi)$$

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Rechenregeln mit Polarform:
  - Komplexe Konjugation:

$$z^* = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^* = |z|e^{-i\varphi}$$

Wichtiges Beispiel:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Trigonometrische Relationen: schnell herleiten!

Beispiel: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$