TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 14: Komplexe Zahlen + Fourier Analysis

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Januar 23, 2023

§ 9.1 Komplexe Zahlen: Grundlagen

- Komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$: Erweiterung der reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$

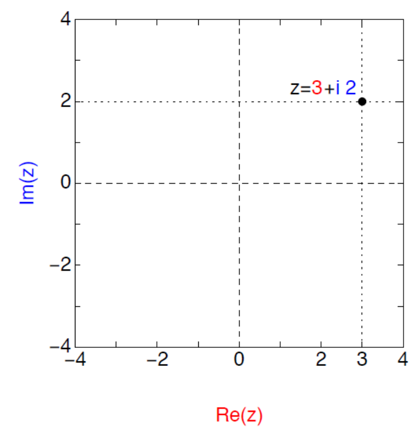
$$z = x + i\,y \qquad x \in \mathbb{R} \text{ und } y \in \mathbb{R}$$

Imaginäre Einheit $\quad i^2 = -1$

Realteil & Imaginärteil:

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

$$\mathrm{Im}(z) = y$$



§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Fundamentalsatz der Algebra: $P(z)$ sei ein Polynom vom Grad n mit Komplexen Koeffizienten. Dann hat $P(z)$ genau n Nullstellen.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$= a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Fundamentalsatz der Algebra: $P(z)$ sei ein Polynom vom Grad n mit Komplexen Koeffizienten. Dann hat $P(z)$ genau n Nullstellen.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$= a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 1: $P(z) = z^2 - 2z + 2$

$$= (z - z_1)(z - z_2)$$

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = 1 - i$$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Fundamentalsatz der Algebra: $P(z)$ sei ein Polynom vom Grad n mit Komplexen Koeffizienten. Dann hat $P(z)$ genau n Nullstellen.

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$= a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

Beispiel 2: $P(z) = z^n - 1$

$$= \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) \qquad z_j = e^{i \frac{2\pi}{n} j}$$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Anwendung: Lösung einer Differentialgleichungen

$$a_n \frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{df(x)}{dx} + a_0 f(x) = 0$$

Beispiel: Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t) \qquad \omega \in \mathbb{R}$$

Ansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 = -\omega^2 \Rightarrow \lambda_1 = i\omega \qquad \lambda_2 = -i\omega$$

$$x(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Vektoren mit Komplexen Zahlen:

$$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Komplexe Konjugation: $$A^* = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix}$$

Hermitesche Konjugation („der hermitesch adjungierte Vektor“):

$$A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} z_1^* \\ z_2^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt: $A^\dagger A \geq 0$

Normierung: $A \to \tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{A^\dagger A}} A$

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2i \end{pmatrix}$

Komplexe Konjugation: $A^* = \begin{pmatrix} 1 - i \\ +2i \end{pmatrix}$

Hermitesche Konjugation: $A^\dagger = (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 - i \\ +2i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \end{pmatrix}$

Skalarprodukt: $A^\dagger A = \begin{pmatrix} 1-i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2i \end{pmatrix} = (1-i)(1+i) + 2i(-2i) = 6$

Normierung: $A \to \tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{A^\dagger A}} A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2i \end{pmatrix}$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Matrizen mit Komplexen Zahlen:

$$B = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

Komplexe Konjugation: $$B^* = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

Hermitesche Konjugation: $$B^\dagger = (B^*)^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Matrizen mit Komplexen Zahlen:

$$B = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

Komplexe Konjugation: $$B^* = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

Hermitesche Konjugation: $$B^\dagger = (B^*)^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_2^* \\ z_3^* & z_4^* \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$$

Hermitesche Matrix: $B^\dagger = B$

Satz: Jede hermitesche Matrix ist diagonalisierbar und hat nur reelle Eigenwerte.

Beispiel: $B = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$

Eigenwerte & normierte Eigenvektoren?

$$\Rightarrow \quad B v_j = \lambda_j v_j$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

§ 9.2 Komplexe Zahlen: Anwendung

- Diagonalisierung einer Hermiteschen Matrix:

$$Mv_j = \lambda_j v_j$$

λ_j: Eigenwerte

v_j: normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

$$\Rightarrow \quad U^{-1}MU = \Lambda$$

$$U = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^\dagger$$

$$UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}_{n\times n}$$

U: unitäre Matrix

§ 10.1 Fourier-Reihe

- Fourier-Reihe der periodischen Funktion:

$$f(x+L)=f(x)$$

Beispiele: $\sin(x+2\pi)=\sin(x)$ $\tan(x+\pi)=\tan(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)\right]$$

§ 10.1 Fourier-Reihe

- Fourier-Reihe in komplexer form:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

äquivalent zu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right) \right]$$

$$\Rightarrow \quad a_0 = 2c_0 \qquad a_n = c_n + c_{-n} \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

§ 10.1 Fourier-Reihe

- Wie bestimmen wir die Fourier-Koeffizienten?

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \; f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$$

Fourier-Koeffizienten :

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \; f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$$

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{2\pi}{L}mx}$$

Beweis:

$$\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \; f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx} = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{2\pi}{L}mx}\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$$

$$= \frac{1}{L}\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \, e^{i\frac{2\pi}{L}(m-n)x}}_{L\delta_{mn}}$$

$$= c_n$$

§ 10.1 Fourier-Reihe

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x\ f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$$

- Eigenschaften:

  - $f(x)$ reell: $c_n = c_{-n}^*$

  - $f(-x) = f(x)$: $c_n = c_{-n}$

  - $f(-x) = -f(x)$: $c_n = -c_{-n}$

§ 10.1 Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$$

- Entwicklung mit Sinus- und Cosinus-Funktionen:

  - $f(-x) = f(x)$: $\quad c_n = c_{-n}$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)$$

  - $f(-x) = -f(x)$: $\quad c_n = -c_{-n}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{L}nx\right)$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x, \quad x \in (-\pi, \pi]$

$f(x + 2\pi) = f(x)$

Fourier-Reihe?

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \; f(x)\, e^{-i\frac{2\pi}{L}nx}$$

$L = 2\pi$

$x_0 = -\pi$ (einfache Wahl…)

$$\Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \; \frac{1}{2} x\, e^{-inx} = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{i}{2n}(-1)^n & n \neq 0 \end{cases}$$

§ 10.1 Fourier-Reihe

- Parsevals Theorem:

$$\frac{1}{L}\int_{x_0}^{x_0+L} \mathrm{d}x \ |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x, \ \ x \in (-\pi, \pi]$

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$c_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{i}{2n}(-1)^n & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Basler Problem!