SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 15: Fourier Analysis

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Januar 30, 2023

Informationen zur Klausur

- Termin der Klausur: 10.02.2023 (Freitag), 11:15 - 14:15, ZEU/250/Z
- Sie dürfen ein handgeschriebenes Din A4 Blatt zur Klausur mitbringen. Taschenrechner sind nicht erlaubt. Die Anweisungen werden diese Woche per E-Mail verschickt.
- Themen: Vorlesung 1 bis 14 (ohne Vorlesung 15!).
- Die alten Klausuren wurden bereits zu Referenzzwecken hochgeladen.
- 60 Punkte (Klausur) + 6 Bonuspunkte (2x Vorrechnen) = 66 Punkte
  Zum bestanden werden 30 Punkte benötigt.

§ 10.2 Fourier-Transformation

- Fourier-Transformation von Funktionen:

$$\mathcal{F}: \qquad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \;\, f(x)\, e^{-ikx}$$

$$\mathcal{F}^{-1}: \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \;\, g(k)\, e^{+ikx}$$

§ 10.2 Fourier-Transformation

- Fourier-Transformation von Funktionen:

$$\mathcal{F}: \qquad g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x)\, e^{-ikx}$$

$$\mathcal{F}^{-1}: \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; g(k)\, e^{+ikx}$$

Beispiel: Zeit vs. Frequenz

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \; \tilde{x}(\omega)\, e^{i\omega t}$$

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; x(t)\, e^{-i\omega t}$$

§ 10.2 Fourier-Transformation

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x)\, e^{-ikx}$$

- Eigenschaften:

  - $f(x)$ reelle: $g(-k) = g(k)^*$

  - $f(-x) = f(x)$: $g(-k) = g(k)$

  - $f(-x) = -f(x)$: $g(-k) = -g(k)$

Beispiel: $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$ Gaußsches Wellenpaket

Fourier-Transformation?

Beispiel: $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$ Gaußsches Wellenpaket

Fourier-Transformation?

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \; e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \;\; e^{-\frac{1}{2}(x^2+2ik)}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \;\; e^{-\frac{1}{2}(x+ik)^2} \cdot e^{+(ik)^2/2}$$

$$\overset{y\,=\,ik}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \;\; e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot e^{-k^2/2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{1/2}} \cdot e^{-k^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2}$$

Gaußsches Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \;\; e^{-ay^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a \in \mathbb{R}$$

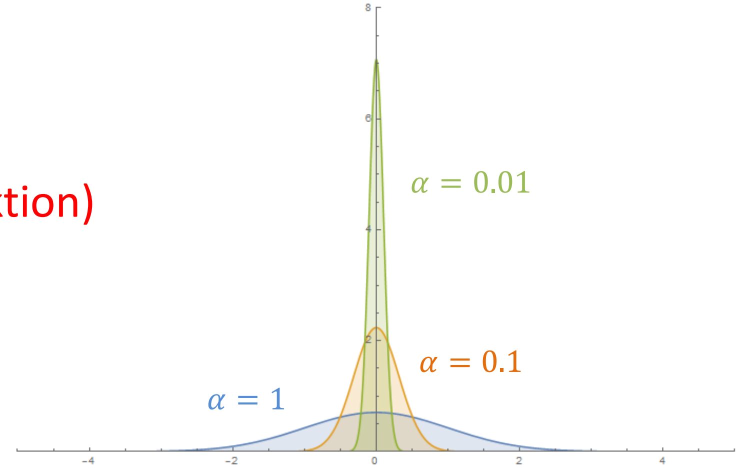
§ 10.2 Fourier-Transformation

- Delta-Funktion:

Delta-Distribution

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$$

$$= \delta(-x) \qquad \text{(gerade Funktion)}$$

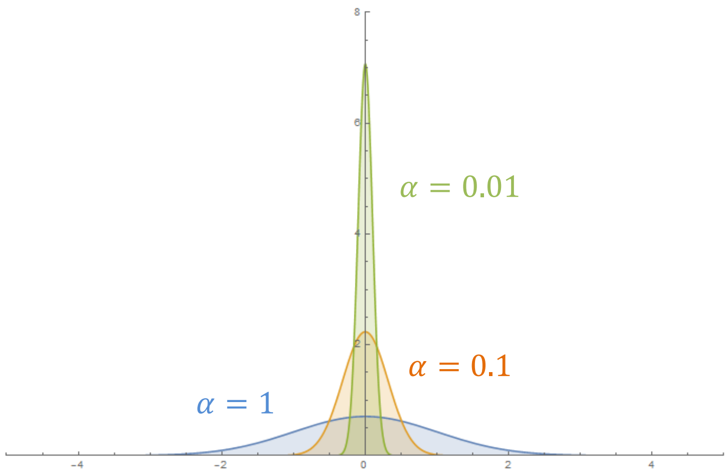


§ 10.2 Fourier-Transformation

- Delta-Funktion:

[Delta-Distribution]

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \delta(x) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \ \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} = 1$$

§ 10.2 Fourier-Transformation

- Delta-Funktion:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}}$$

Verschiebung: $$\delta(x - x_0) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\alpha}} = \begin{cases} \infty & x = x_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eigenschaft: $$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; h(x)\, \delta(x - x_0) = h(x_0)$$

Fourier-Transformation: $\delta(x - x_0)$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x - x_0) \, e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$$

Fourier-Transformation: $\delta(x - x_0)$

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \delta(x - x_0) \, e^{-ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$$

$$\Rightarrow \quad \delta(x - x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, g(k) \, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} \, e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{ik(x - x_0)}$$

DGL: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Inhomogene DGL: $x(t) = x_{\mathrm{homo}}(t) + x_{\mathrm{spez}}(t)$

DGL: $$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Schritt 1: Löse die homogene DGL:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Ansatz: $x(t) = e^{i\omega t}$ $\Rightarrow$ $[(i\omega)^2 + \omega_0^2]e^{i\omega t} = 0$

$$\omega = \pm\omega_0$$

homogene Lösung: $x_{\mathrm{homo}}(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$ $\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

DGL: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Schritt 2: Finde eine spezielle Lösung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, [\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t} \qquad \forall\, \omega \in \mathbb{R}$$

DGL: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Schritt 2: Finde eine spezielle Lösung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, [\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] e^{-i\omega t} = \underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t}}$$

$$\sqrt{2\pi} \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, e^{i(\Omega - \omega)t}$$

$$= \sqrt{2\pi} \frac{F_0}{m} \delta(\Omega - \omega)$$

DGL: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Schritt 2: Finde eine spezielle Lösung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, [\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega_1 \;\; \tilde{x}(\omega_1) \, e^{i\omega_1 t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \ddot{x}(t) \, e^{-i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega_1 \, (i\omega_1)^2 \tilde{x}(\omega_1) e^{i(\omega_1 - \omega)t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega_1 \, (i\omega_1)^2 \tilde{x}(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega) \; = (i\omega)^2 \tilde{x}(\omega)$$

DGL: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Schritt 2: Finde eine spezielle Lösung:

$$\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, [\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] e^{-i\omega t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \omega_0^2 x(t) \, e^{-i\omega t} = \omega_0^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, x(t) \, e^{-i\omega t}$$

$$= \omega_0^2 \tilde{x}(\omega)$$

DGL: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$

Getriebener harmonischer Oszillator

Lösung durch Fourier-Transformation?

Schritt 2: Finde eine spezielle Lösung:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, [\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)] e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \, \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad [(i\omega)^2 + \omega_0^2] \tilde{x}(\omega) = \sqrt{2\pi} \frac{F_0}{m} \delta(\Omega - \omega)$$

$$\tilde{x}(\omega) = \sqrt{2\pi} \frac{F_0}{m} \frac{\delta(\Omega - \omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} \qquad \forall \, \omega \in \mathbb{R}$$

$$x_{\text{spez}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \tilde{x}(\omega) \, e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} e^{i\Omega t}$$

§ 10.2 Fourier-Transformation

- Fourier-Transformation in 3D:

$$\mathcal{F}: \qquad g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{r}\; f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\mathcal{F}^{-1}: \qquad f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k}\, g(\vec{k}) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

§ 10.2 Fourier-Transformation

- Fourier-Transformation in 3D:

$$\mathcal{F}: \qquad g(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{r}\; f(\vec{r})\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\mathcal{F}^{-1}: \qquad f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k}\, g(\vec{k}) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Delta-Funktion in 3D: $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0) = \dfrac{1}{(2\pi)^{3/2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k}\, e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)}$

Beispiel: Coulomb-Potential in 3D

Hinweise: $\int_0^\infty \mathrm{d}p \, \frac{\sin p}{p} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k} \, \frac{4\pi}{\left|\vec{k}\right|^2} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Beispiel: Coulomb-Potential in 3D

Hinweise: $\int_0^\infty \mathrm{d}p \, \frac{\sin p}{p} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k} \, \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Kugelkoordinaten:

$$\vec{k}\cdot\vec{r} = |\vec{k}| \, |\vec{r}| \cos\theta_k$$

$$k = |\vec{k}|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_y \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k_z$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta_k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k \; k^2 \sin\theta_k$$

Beispiel: Coulomb-Potential in 3D

Hinweise: $\int_0^\infty \mathrm{d}p\, \frac{\sin p}{p} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k}\, \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\vec{k}\, \frac{4\pi}{|\vec{k}|^2}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta_k \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k\ k^2 \sin\theta_k\ \frac{4\pi}{k^2}\, e^{ik|\vec{r}|\cos\theta_k}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k \int_0^\pi \mathrm{d}\theta_k \sin\theta_k\, e^{ik|\vec{r}|\cos\theta_k}$$

$$\overset{y = \cos\theta_k}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k\ (-1) \int_1^{-1} \mathrm{d}y\, e^{ik|\vec{r}|y}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k\ \frac{1}{ik|\vec{r}|} \left(e^{ik|\vec{r}|} - e^{-ik|\vec{r}|}\right)$$

$$\overset{p = k|\vec{r}|}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{d}k\ \frac{2\sin(k|\vec{r}|)}{k|\vec{r}|} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2}{|\vec{r}|} \int_0^\infty \mathrm{d}p\ \frac{\sin p}{p} = \frac{1}{|\vec{r}|}$$