SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 2: Matrizen

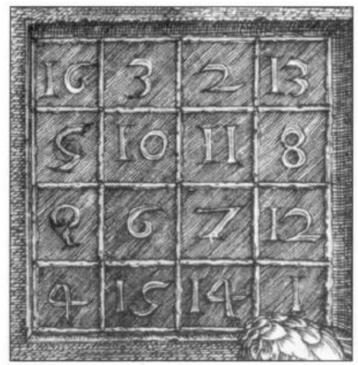
Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Oktober 17, 2022

§ 2.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform



Wikipedia: Detail of “Melancholia I”

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \tau\, e\, a_{\mathrm{c}} & 0 \\ \tau_\epsilon\, e\, a_{\mathrm{c}}\, \mu & -2\, \tau_\epsilon\, a_{\mathrm{g}}\, T \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

§ 2.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	**Spalte 2**	**Spalte 3**	**Spalte 4**
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

M_{13}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 9 \\ 9 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

M_{31}

§ 2.1 Was ist eine Matrix?

- Matrix: Anordnung von Elementen in Tabellenform

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile 1	1	3	4	5
Zeile 2	4	3	1	9
Zeile 3	9	4	3	1

Matrix M: Element in i-ter Zeile und j-ter Spalte heißt M_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

m Zeilen, n Spalten $\Rightarrow$ eine $(m \times n)$-Matrix

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Addition und Subtraktion
  - gilt nur für Matrizen gleicher Größe (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)
  - erfolgt elementweise

$$A + B = C \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \text{und} \quad A - B = D \quad \Leftrightarrow \quad D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 4-2 \\ 2-6 & 9-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$$

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation mit Skalaren
  - erfolgt elementweise

$$B = \lambda\, A \quad \Leftrightarrow \quad B_{ij} = \lambda\, A_{ij}$$

$$3 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 27 \end{pmatrix}$$

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition
  - Vertauschen von Zeilen und Spalten

$$B = A^T \quad \Leftrightarrow \quad B_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad B = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Transposition

Spaltenvektor ⇒ Zeilenvektor

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{d}^T = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$$

3 Zeilen, 1 Spalte

Spaltenvektor: (3×1)-Matrix

Zeilenvektor: (1×3)-Matrix

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj}$$

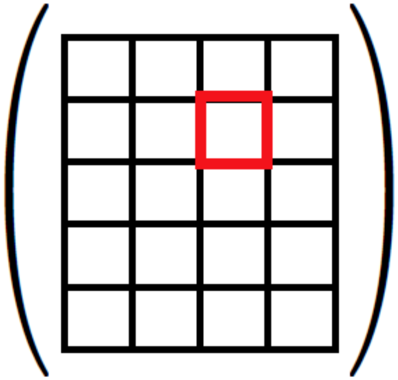
§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



C_{23}

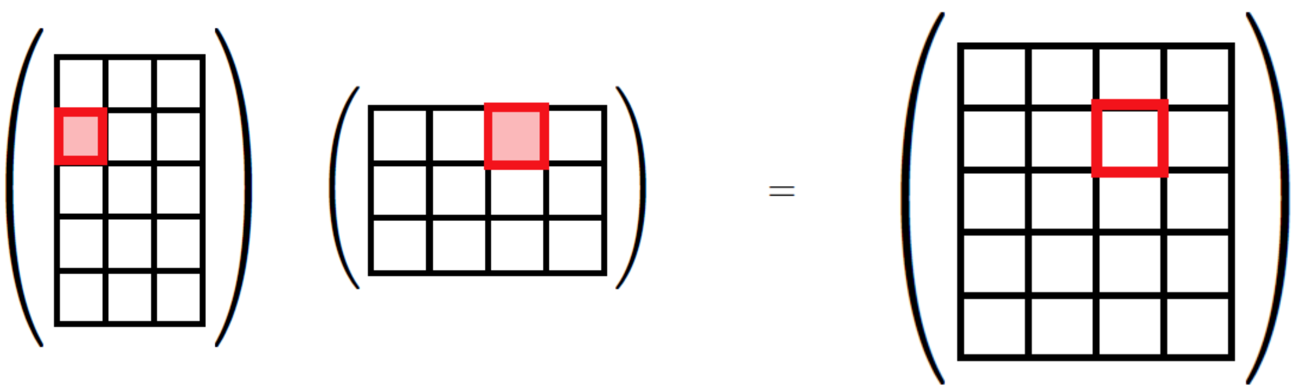
§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



$$A_{21}\,B_{13} \qquad = \qquad C_{23}$$

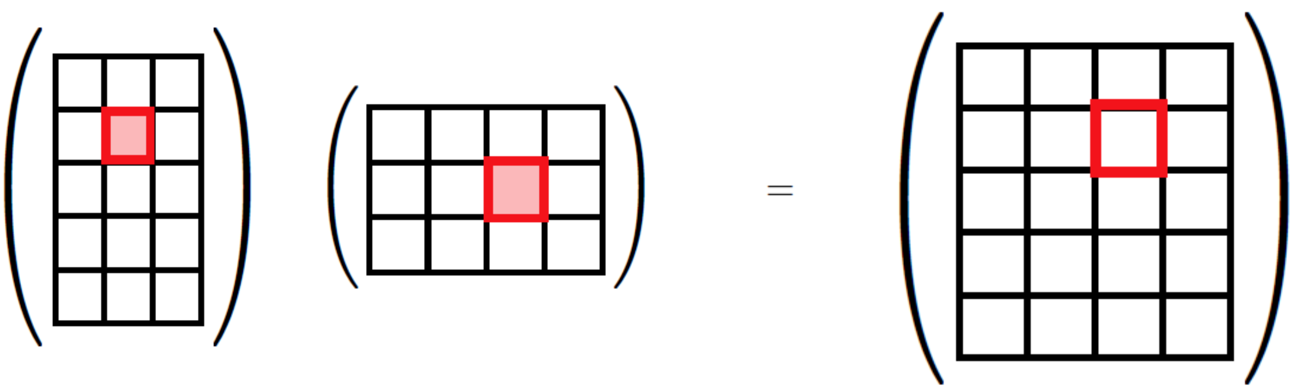
§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$

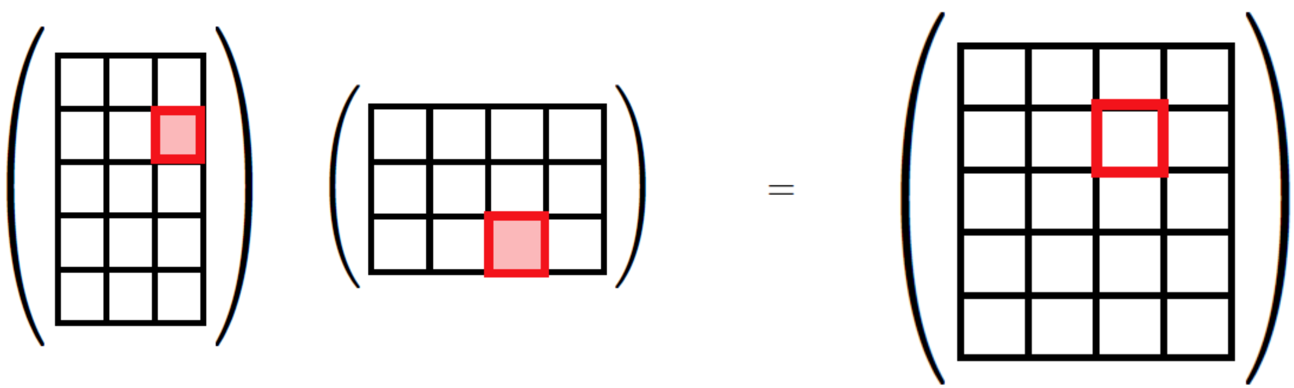


$$A_{21}\,B_{13} + A_{22}\,B_{23} \qquad = \qquad C_{23}$$

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen
  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)
  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$



$$A_{21}\,B_{13} + A_{22}\,B_{23} + A_{23}\,B_{33} \qquad = \qquad C_{23}$$

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

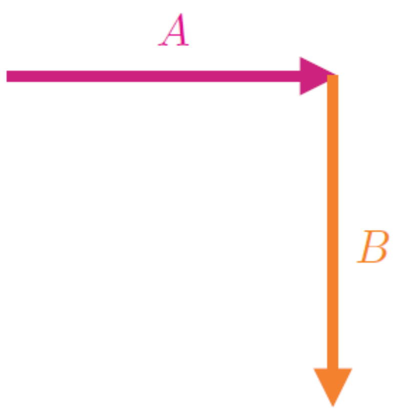
- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$

$C = A\,B:$



§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Rechenoperationen: Multiplikation von zwei Matrizen

  - ➢ geht, wenn wir eine $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times p)$-Matrix multiplizieren (von rechts)

  - ➢ Ergebnis: $(m \times p)$-Matrix

$$C = A\,B \quad \Leftrightarrow \quad C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\,B_{kj}$$

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

§ 2.2 Matrizen: Eigenschaften und Rechenregeln

- Einige wichtige Matrizenarten:
  - Quadratische Matrix: $(n \times n)$-Matrix (selbe Anzahl von Spalten und Zeilen)
  - Einheitsmatrix: Einträge auf „Hauptdiagonalen“ alle 1, sonst nur 0

$$\mathbb{1}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{1}_{5\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  - Symmetrische Matrix: „Matrix = Spiegelbild an der Diagonalen“ ($M = M^T$)

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M^T$$

§ 2.3 Spur einer Matrix

- Spur: eine der wichtigsten Kenngrößen einer quadratischen Matrix
  - Spur = Summe der Diagonalelemente
  - Symbol: Sp (oder tr)

$$A \text{ ist } (n \times n)\text{-Matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Sp}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

§ 2.3 Spur einer Matrix

- Eigenschaften:

  - Spur ist „lineare Abbildung“:

$$\mathrm{Sp}(\lambda_1\, A + \lambda_2\, B) = \lambda_1\, \mathrm{Sp}(A) + \lambda_2\, \mathrm{Sp}(B) \qquad (\lambda_1, \lambda_2\text{: Zahlen})$$

  - Spur ist Transposition egal:

$$\mathrm{Sp}(A^T) = \mathrm{Sp}(A)$$

  - Spur ist „invariant unter zyklischer Vertauschung“:

$$\mathrm{Sp}(A\, B\, C) = \mathrm{Sp}(B\, C\, A) = \mathrm{Sp}(C\, A\, B)$$

§ 2.3 Spur einer Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \ , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \ , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Sp}(A\,B - 3\,C) = ?$$

§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen
  - Symbol: Det (oder det)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \text{ Permutation von } 1 \text{ bis } n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} \cdot A_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n,\sigma(n)}$$

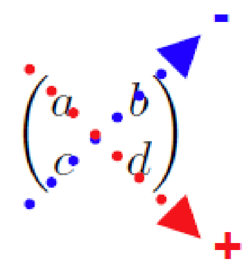
§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen
    - ➢ Symbol: Det (oder det)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \text{ Permutation von } 1 \text{ bis } n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, A_{1,\sigma(1)} \cdot A_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n,\sigma(n)}$$

2 × 2 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = a\,d - b\,c$$



§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

3×3 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Det}(A) = a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - g\,e\,c - h\,f\,a - i\,d\,b$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & - & - & - \\ a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \\ & & & + & + & + \end{array}$$

§ 2.4 Determinante einer Matrix

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ Det(A) =?

$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ Det(B) =?

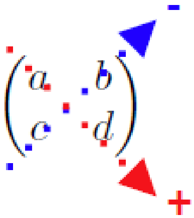
§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

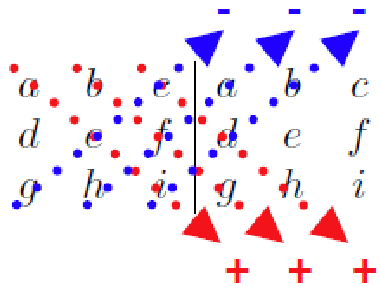
  ➢ 2×2 und 3×3 Matrizen:

Determinante = +(Produkt der Diagonalen) - (Produkt der „nicht-Diagonalen“)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$



$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & a & b & c \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array} \quad \Rightarrow$$



§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen

  - $n \times n$ Matrizen ($n > 3$): geht anders als bei (2×2) und (3×3)-Matrizen

  - Entwicklungssatz:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Determinante : eine wichtige Kenngröße von quadratischen Matrizen
  - $n \times n$ Matrizen ($n > 3$): geht anders als bei (2×2) und (3×3)-Matrizen
  - Entwicklungssatz:

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \, \mathrm{Det}(\tilde{A}(ij))$$

Matrix $\tilde{A}(ij)$:
i-ter Zeile und j-ter Spalte von A werden entfernt.

§ 2.4 Determinante einer Matrix

Beispiele:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{Det}(B) = ?$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{Det}(C) = ?$$

§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Eigenschaften:

  - Produkt von Matrizen:

$$\mathrm{Det}(A\,B) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B)$$

  - Vielfaches von $(n \times n)$-Matrizen:

$$\mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n\,\mathrm{Det}(A)$$

  - Determinante der Transponierten:

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A^T)$$

§ 2.4 Determinante einer Matrix

- Eigenschaften:
  - Die Determinante einer Matrix bleibt unverändert, wenn man das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte hinzuzählt.
  - Die Determinante einer Matrix bleibt unverändert, wenn man das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile hinzuzählt.
  - Die Determinante einer Matrix, in der zwei Spalten (oder zwei Zeilen) Vielfache voneinander sind, ist Null. Ebenso ist die Determinante einer Matrix, in der alle Einträge in einer Spalte (oder Zeile) Null sind, gleich Null.