SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 3: Matrizen

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Oktober 24, 2022

Information

- Der nächste Montag (31.10.2022) ist ein Feiertag und „vorlesungsfrei“. Unsere Vorlesung wird nur online über Zoom durchgeführt und das Video wird danach hochgeladen.

§ 2.5 Inverse Matrix

- Inverse Matrix:
  - definiert für quadratische Matrix
  - Symbol: Inverse Matrix von A ist A^{-1}

$$A\,A^{-1} = \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad A^{-1}\,A = \mathbb{1}$$

  - Nicht jede Matrix hat eine Inverse!
  - Matrix ist invertierbar falls Determinante ungleich Null.

§ 2.5 Inverse Matrix

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$A\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{1}{2} + 0 & 0 + 0 \\ 0 + 0 & 0 + 3 \cdot \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.5 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine: Gauß-Jordan Verfahren

  - Schreibe (Matrix|Einheitsmatrix)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

  - Forme um - erlaubte Operationen:
    - Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl
    - Vertauschen von Zeilen
    - Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

  - Bringe linke Seite auf Einheitsmatrix-Form. Rechte Seite = inverse Matrix

§ 2.5 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine: Gauß-Jordan Verfahren

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{nimm Zeile 1 mal } \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Big\downarrow \text{nimm Zeile 2 mal } \frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

§ 2.5 Inverse Matrix

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = ?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-4 \text{ x Zeile 1 + Zeile 2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{3}{10} \text{ x Zeile 2 + Zeile 1}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10} \text{ x Zeile 2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

§ 2.5 Inverse Matrix

- Anwendung: Lineare Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} A_{11}\,x_1 + A_{12}\,x_2 + \ldots + A_{1m}\,x_m &= b_1 \\ A_{21}\,x_1 + A_{22}\,x_2 + \ldots + A_{2m}\,x_m &= b_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ A_{n1}\,x_1 + A_{n2}\,x_2 + \ldots + A_{nm}\,x_m &= b_n \end{aligned}$$

§ 2.5 Inverse Matrix

- Anwendung: Lineare Gleichungssysteme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{=:\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \quad \Rightarrow \quad A\,\vec{x} = \vec{b}$$

$\Rightarrow$ $\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$ *A* invertierbar?

§ 2.5 Inverse Matrix

- Anwendung: Lineare Gleichungssysteme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{=:\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{=:\vec{b}} \quad \Rightarrow \quad A\,\vec{x} = \vec{b}.$$

- $\mathrm{Det}(A) \neq 0$: Eindeutige Lösung
- $\mathrm{Det}(A) = 0$: keine Lösung oder unendlich viele Lösungen

§ 2.5 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine: Gauß-Verfahren

  - Schreibe (Matrix|Vektor)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \dots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

  - Forme um - erlaubte Operationen:
    - Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl
    - Vertauschen von Zeilen
    - Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Ziel: „Dreiecksform“

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

§ 2.5 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine: Gauß-Verfahren

  - Schreibe (Matrix|Vektor)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \dots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

  - Forme um - erlaubte Operationen:
    - Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl
    - Vertauschen von Zeilen
    - Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Ziel: „Dreiecksform“

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{*} & \boxed{*} \end{array}\right)$$

$(0\ 0\ \dots|*)$ mit $* \neq 0$

keine Lösung

§ 2.5 Inverse Matrix

- Lösungsmaschine: Gauß-Verfahren
  - Schreibe (Matrix|Vektor)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & \dots & A_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

  - Forme um - erlaubte Operationen:
    - Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl
    - Vertauschen von Zeilen
    - Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen

Ziel: „Dreiecksform“

$$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

$$(0 \;\; 0 \;\; \dots |0)$$

unendlich viele Lösungen

§ 2.5 Inverse Matrix

Beispiel 1:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - 2x_3 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

§ 2.5 Inverse Matrix

Beispiel 2: Bilden Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ eine Basis?

$$\sum_{i=1,2,3} \alpha_i \, \vec{v}_i = 0$$ nur erfüllt werden kann, wenn all $\alpha_i = 0$.

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

- Einsteinsche Summenkonvention: Wenn Indizes auf einer Seite der Gleichung doppelt vorkommen und über alle möglichen Werte des Index summiert wird, dann kann man das Summenzeichen einfach weglassen.

Beispiele:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_i \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \, b_i$$

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^{k} A_{ip} \, B_{pj} \quad \Rightarrow \quad C_{ij} = A_{ip} \, B_{pj}$$

freier Index Laufindex

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

- Das Kronecker-Delta:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

➢ δ_{ij} sind die Komponenten einer $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

- Der Levi-Civita-Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk \in \{123, 231, 312\} \\ -1 & , ijk \in \{132, 321, 213\} \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

- Total antisymmetrisch: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

- Der Levi-Civita-Tensor:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , ijk \in \{123, 231, 312\} \\ -1 & , ijk \in \{132, 321, 213\} \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

  - Total antisymmetrisch: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$
  - Rechenregeln: $\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\,\delta_{kn} - \delta_{jn}\,\delta_{km}$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijn} = 2\,\delta_{kn}$$

$$\epsilon_{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6$$

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel: Kreuzprodukt von zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel: Kreuzprodukt von zwei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Leftrightarrow c_i = \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$$

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel 1 : Spatproduct

$$\text{Spatprodukt}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

§ 2.6 Rechnen mit Indizes

Beispiel 2: Die BAC-CAB-Regel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$$