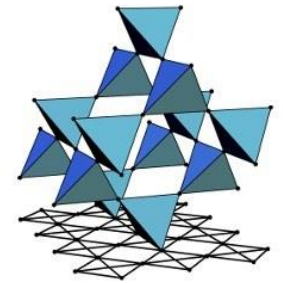




TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN

DRESDEN
concept



SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 4: Eigenwerte, Eigenvektoren und Basiswechsel

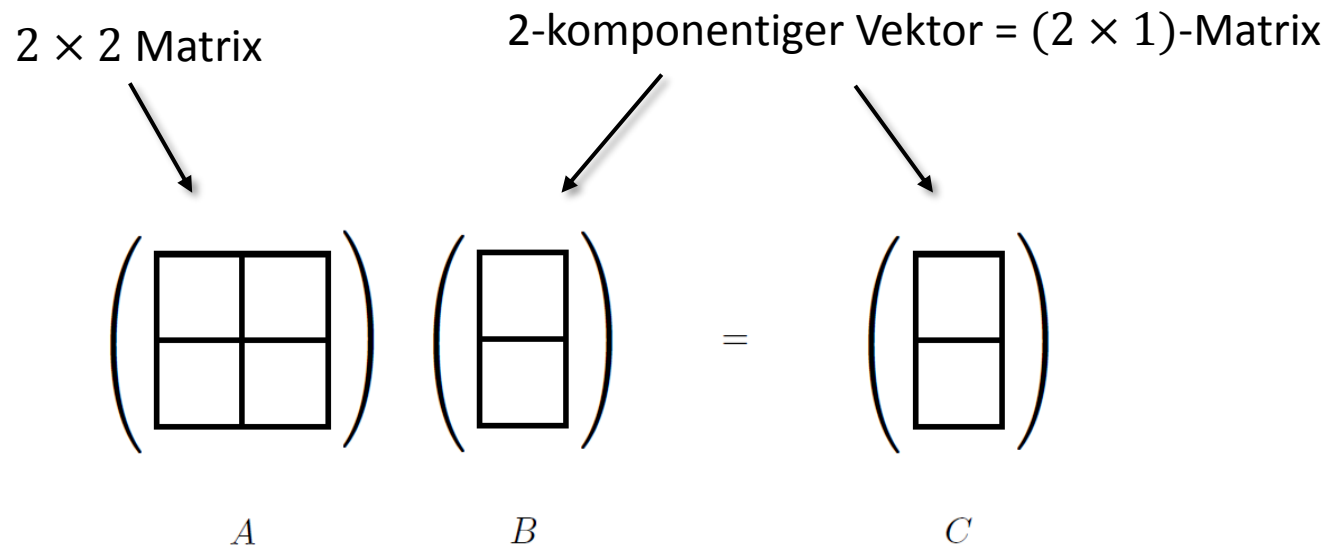
Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Oktober 31, 2022

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: **Abbildung von Vektoren auf Vektoren**



§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: **Abbildung von Vektoren auf Vektoren**

Matrix A bildet **Vektor B** auf **Vektor C** ab.

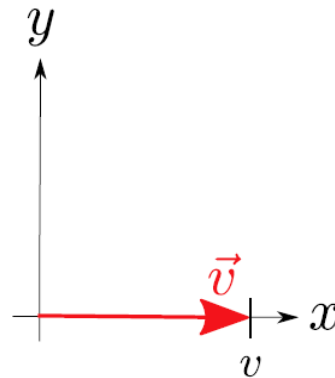
$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

A B C

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: **Abbildung von Vektoren auf Vektoren**

➤ Drehmatrix $D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ dreht Vektor um Winkel ϕ

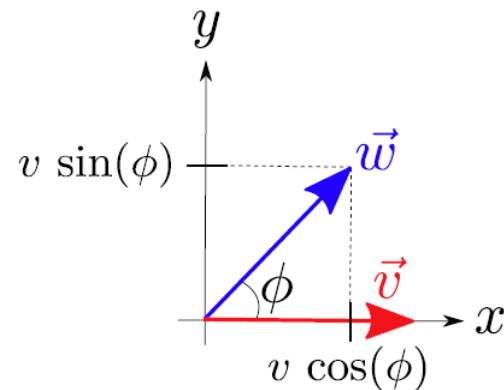


$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w} = D_\phi \vec{v}$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: **Abbildung von Vektoren auf Vektoren**

➤ Drehmatrix $D_\phi = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$ dreht Vektor um Winkel ϕ



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{w} = D_\phi \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \cos(\phi) \\ v \sin(\phi) \end{pmatrix}$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Die Drehmatrix ist ein Spezialfall der **orthogonalen Transformation**:

$$O^T O = \mathbb{I}_{n \times n}$$

➤ $\text{Det}(O) = \pm 1$

➤ $O^{-1} = O^T$

- Die orthogonale Transformation bildet eine orthonormalbasis auf eine orthonormalbasis ab.

$$\vec{e}'_i = O \vec{e}_i$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \rightarrow \quad \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij}$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: **Abbildung von Vektoren auf Vektoren**

Matrix A bildet **Vektor B** auf **Vektor C** ab.

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

A B C

„Man steckt einen Vektor rein, die Matrix spuckt einen anderen Vektor aus.“

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Matrix: **Abbildung von Vektoren auf Vektoren**

Matrix A bildet **Vektor B** auf **Vektor C** ab.

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

A B C

„Man steckt einen Vektor rein, die Matrix spuckt einen anderen Vektor aus.“



Ist es wirklich immer ein **anderer** Vektor?

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- **Eigenvektor** einer quadratischen Matrix:

$$M \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \text{mit Zahl } \lambda \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda: \text{Eigenwert} \\ \vec{v}: \text{Eigenvektor} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Berechnung der Eigenwerte:

$$M \vec{v} - \lambda \vec{v} = (M - \lambda \mathbf{1}_{n \times n}) \vec{v} = 0$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Berechnung der Eigenwerte:

$$M \vec{v} - \lambda \vec{v} = \underbrace{(M - \lambda \mathbb{1}_{n \times n})}_{\downarrow} \vec{v} = 0$$

$$\text{Det}(M - \lambda \mathbb{1}_{n \times n}) = 0$$

- Die linke Seite: **charakteristisches Polynom** (Grad n in λ)
- Jede Lösung λ der Gleichung ist ein Eigenwert der Matrix M .
- Bei einer $(n \times n)$ -Matrix gibt es **im Allgemeinen** n Eigenwerte.

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenwerte?

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Berechnung der Eigenvektoren:

$$M \vec{v} - \lambda \vec{v} = \underline{(M - \lambda \mathbf{1}_{n \times n}) \vec{v} = 0}$$

- Jeder Eigenwert λ hat einen entsprechenden Eigenvektor \vec{v} .
- Wenn wir diese Gleichung in Komponenten schreiben, erhalten wir ein **lineares Gleichungssystem** für die Komponenten des Vektors.
- Dieses Gleichungssystem hat **unendlich** viele Lösungen:

$$M \vec{v} = \lambda \vec{v} \quad \Rightarrow \quad M (\alpha \vec{v}) = \alpha M \vec{v} = \alpha \lambda \vec{v} = \lambda (\alpha \vec{v})$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren?


§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Die **normierten** Eigenvektoren einer **reellen symmetrischen Matrix** bilden eine Orthonormalbasis.

$$M \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

λ_i : Eigenwerte

\vec{v}_i : normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

 $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij}$

Orthogonale Transformation: $U = (\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n)$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Diagonalisierung einer reellen symmetrischen Matrix:

$$M' = U^{-1} M U \qquad U^{-1} = U^T$$

$$M \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

λ_i : Eigenwerte

\vec{v}_i : normierte Eigenvektoren (Orthonormalbasis)

$$U = (\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \dots \quad \vec{v}_n) \qquad M' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

§ 2.7 Eigenvektoren und Eigenwerte

- Diagonalisierung einer quadratischen Matrix:

$$M' = U^{-1} M U$$

$$M \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$$

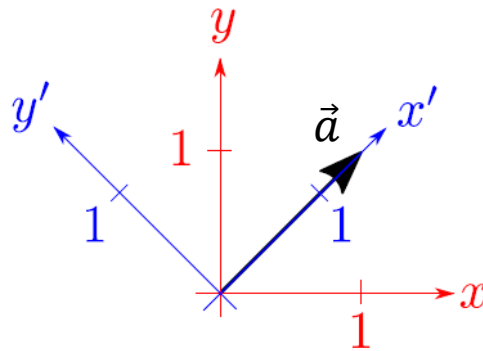
λ_i : Eigenwerte

\vec{v}_i : normierte Eigenvektoren

- Achtung: Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar!
(Eine reelle symmetrische Matrix immer diagonalisierbar.)

§ 2.8 Basiswechsel

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:

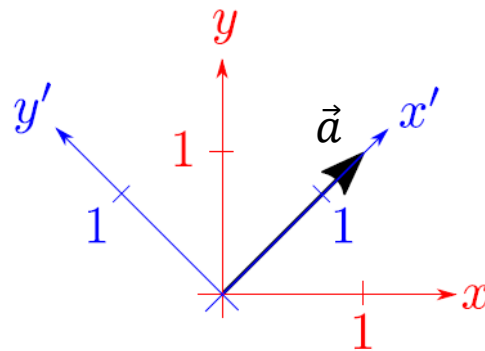


Koordinatensystem K : $\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Koordinatensystem K' : $\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

§ 2.8 Basiswechsel

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

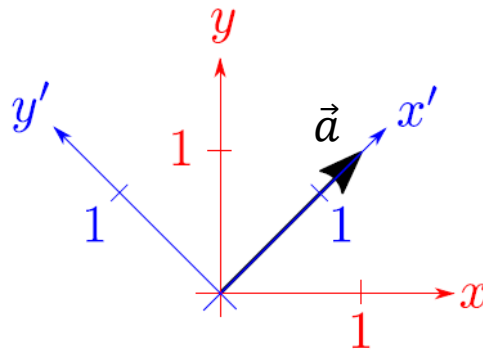
Wenn wir die Achse drehen, dreht sich der Vektor in eine **andere** Richtung.

Drehung in **andere** Richtung!

$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = D_{-\pi/4} \vec{a}_K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.8 Basiswechsel

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

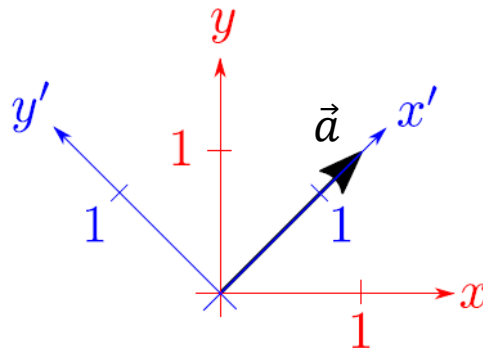
$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bei Vektoren:

- Der Vektor bleibt **unverändert**.
- Die Darstellung (Zahlen in Spalte) hängt vom Koordinatensystem ab.

§ 2.8 Basiswechsel

- Änderung der Darstellung bei Basiswechsel:



$$\vec{a}_K = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

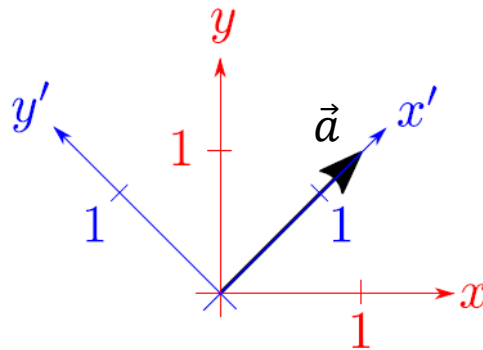
$$\vec{a}_{K'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bei Abbildungen:

- Die Abbildung bleibt **unverändert**.
- Die Darstellung (Zahlen in Matrix) hängt vom Koordinatensystem ab.

§ 2.8 Basiswechsel

- Wechsel der Basisvektoren:



Im Koordinatensystem K :
Basisvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

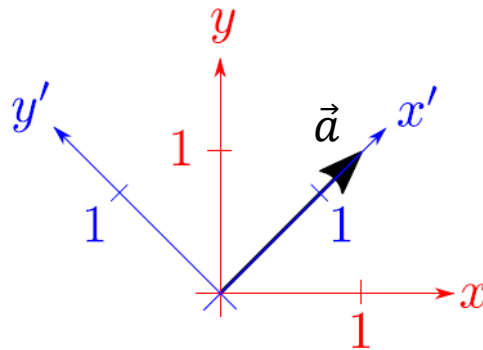
Im Koordinatensystem K' :
Basisvektoren $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y\}$

Drehung um einen
Winkel $\phi = \pi/4$:

$$D_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

§ 2.8 Basiswechsel

- Wechsel der Basisvektoren:



Im Koordinatensystem K :

Basisvektoren $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$

\vec{e}_x' hat in alter Basis die Darstellung

\vec{e}_y' hat in alter Basis die Darstellung

Im Koordinatensystem K' :

Basisvektoren $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y\}$

$$\vec{e}_x' = D_{\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_y' = D_{\pi/4} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

§ 2.8 Basiswechsel

- Basiswechsel im \mathbb{R}^n :

→ Orthonormalbasis $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$:

$$\vec{e}'_i = U \vec{e}_i \quad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

§ 2.8 Basiswechsel

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$:

$$\vec{e}'_i = U \vec{e}_i \quad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} e'_{i,1} \\ e'_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad e_{i,j} = \delta_{ij}$$

$e'_{i,j}$: j -te Komponente der Darstellung
von \vec{e}'_i in der **alten** Basis B

$e_{i,j}$: j -te Komponente der Darstellung
von \vec{e}_i in der **alten** Basis B

$$e'_{i,j} = \sum_{l=1}^n U_{j,l} e_{i,l} = U_{j,i}$$

§ 2.8 Basiswechsel

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$:

$$\vec{e}'_i = U \vec{e}_i \quad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} e'_{i,1} \\ e'_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e_{i,1} \\ e_{i,2} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad e_{i,j} = \delta_{ij}$$

Was ist die Matrix U ? $U = (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \dots \ \vec{e}'_n)$



Darstellungen der **neuen** Basisvektoren \vec{e}'_i in der **alten** Basis

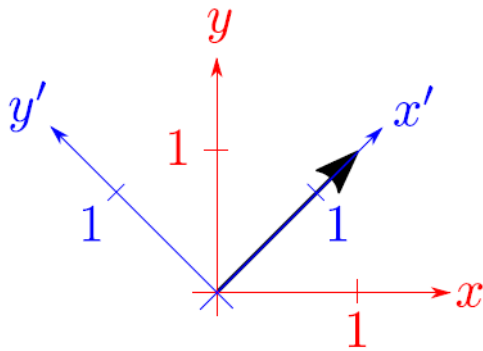
§ 2.8 Basiswechsel

Basiswechsel zu einer neuen Orthonormalbasis $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$:

$$\vec{e}'_i = U \vec{e}_i \quad \text{für alle Basisvektoren } i = 1, \dots, n$$

Was ist die Matrix U ? $U = (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \dots \ \vec{e}'_n)$

Beispiel:



$$U = (\vec{e}'_x \ \vec{e}'_y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$


§ 2.8 Basiswechsel

- Vektoren unter Basiswechsel:

In der alten Basis: $\vec{v} = \sum_j v_j \vec{e}_j \rightarrow v_j = \vec{v} \cdot \vec{e}_j$

In der neuen Basis: $\vec{v} = \sum_i v'_i \vec{e}'_i \rightarrow v'_i = \vec{v} \cdot \vec{e}'_i$

$e'_{i,j} = U_{j,i}$



§ 2.8 Basiswechsel

- Vektoren unter Basiswechsel:

In der alten Basis: $\vec{v} = \sum_j v_j \vec{e}_j \rightarrow v_j = \vec{v} \cdot \vec{e}_j$

In der neuen Basis: $\vec{v} = \sum_i v'_i \vec{e}'_i \rightarrow v'_i = \vec{v} \cdot \vec{e}'_i$



$$v'_i = \sum_j v_j U_{ji} = \sum_j v_j (U^T)_{ij} = \sum_j (U^T)_{ij} v_j$$

$$\vec{v}' = U^T \vec{v} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

§ 2.8 Basiswechsel

- Die Darstellung der Abbildung (Zahlen in der Matrix) hängt von der gewählten Basis ab.

In der alten Basis: $\vec{w} = M\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftrightarrow w_j = \sum_k M_{jk} v_k$$

In der neuen Basis: $\vec{w}' = M'\vec{v}'$

Was ist M' ?



§ 2.8 Basiswechsel

- Die Darstellung der Abbildung (Zahlen in der Matrix) hängt von der gewählten Basis ab.

In der alten Basis: $\vec{w} = M \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \Leftrightarrow w_j = \sum_k M_{jk} v_k$$

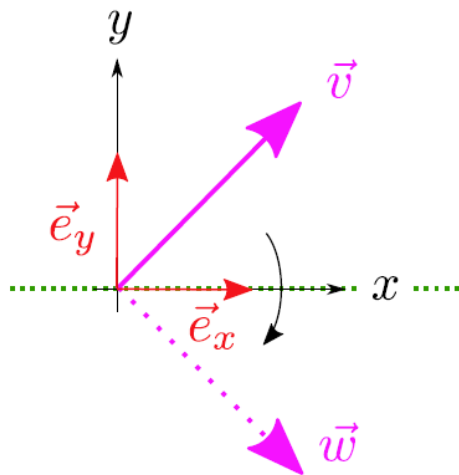
In der neuen Basis: $\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = U^T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $w'_i = \sum_l M'_{il} v'_l$ $M' = U^T M U$



$$w'_i = \sum_j (U^T)_{ij} w_j = \sum_{j,k} (U^T)_{ij} M_{jk} v_k = \sum_{j,k,l} (U^T)_{ij} \underline{M_{jk} U_{kl}} v'_l$$

§ 2.8 Basiswechsel

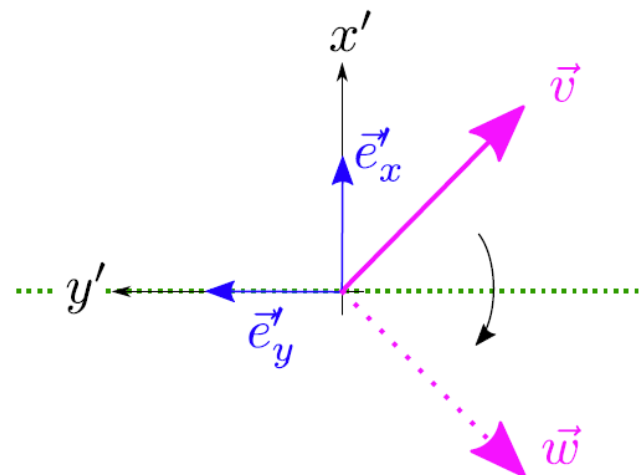
Beispiel: Spiegelung an der horizontalen Achse



$$\vec{v}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_K = \begin{pmatrix} v_x \\ -v_y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



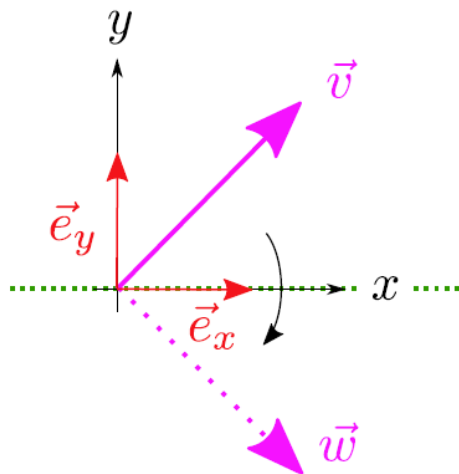
$$\vec{v}_{K'} = \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_{K'} = \begin{pmatrix} -v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M' \begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix}$$

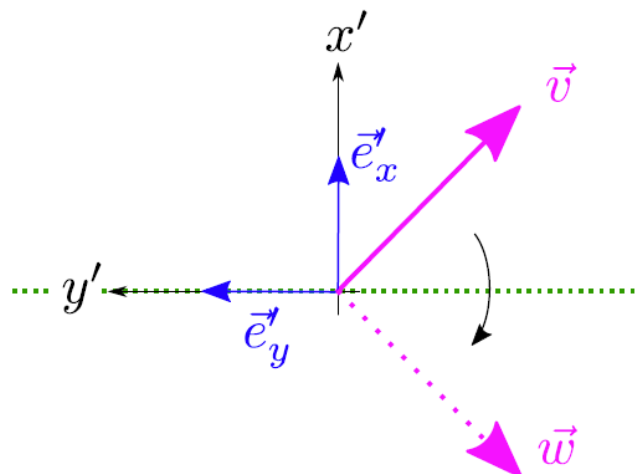
$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

§ 2.8 Basiswechsel

Beispiel: Spiegelung an der horizontalen Achse



$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die Abbildung bleibt **unverändert**.
- Die Darstellung (Zahlen in Matrix) hängt vom Koordinatensystem ab.