TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 5: Differentialrechnung

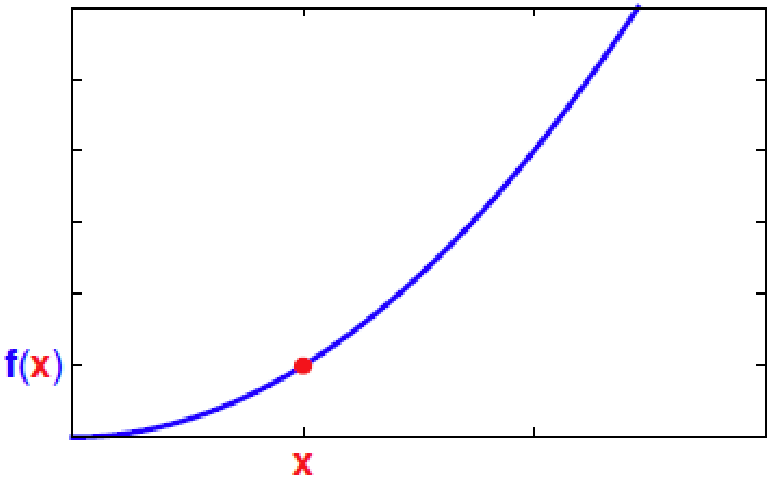
Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

November 7, 2022

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

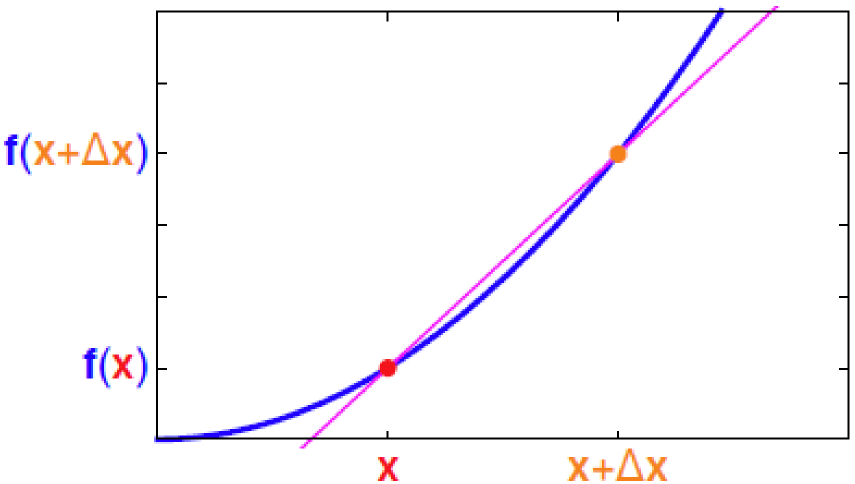


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

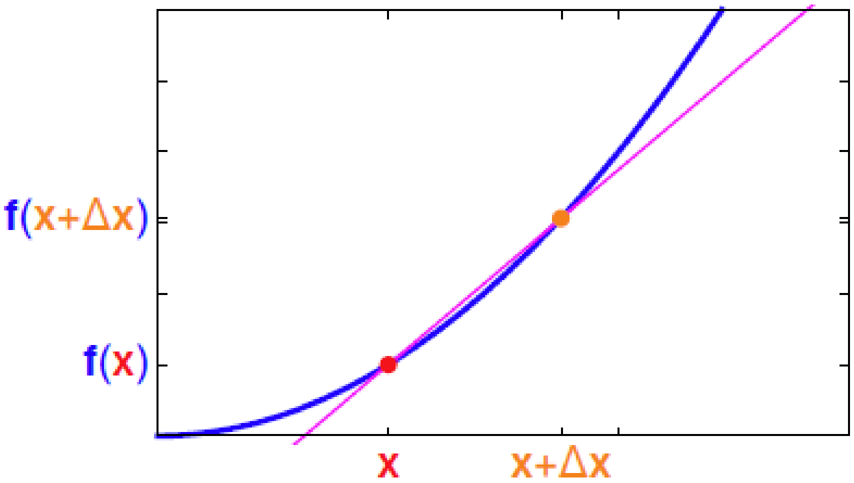


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

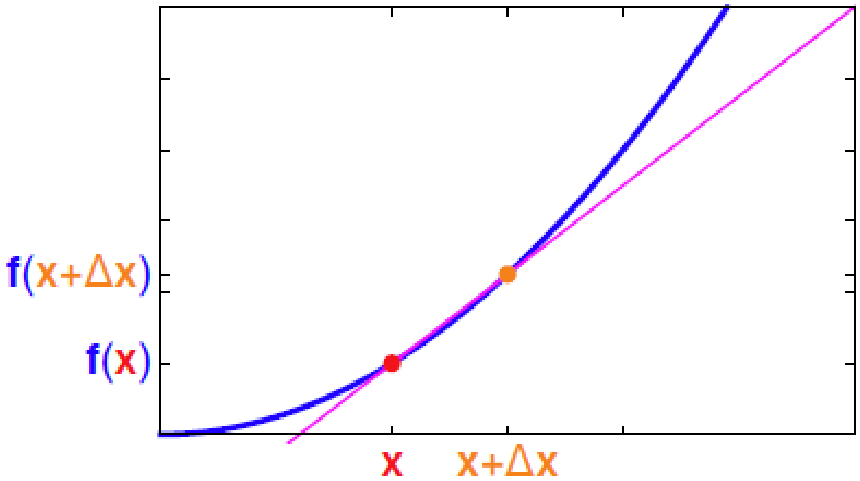


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

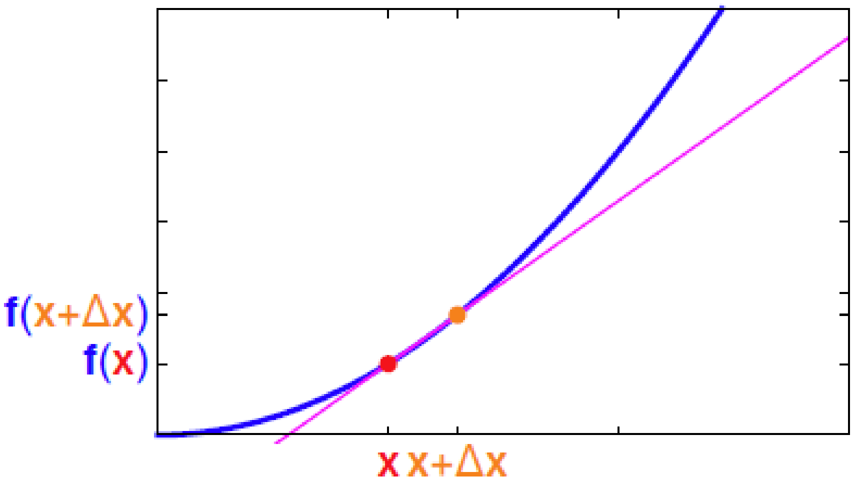


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

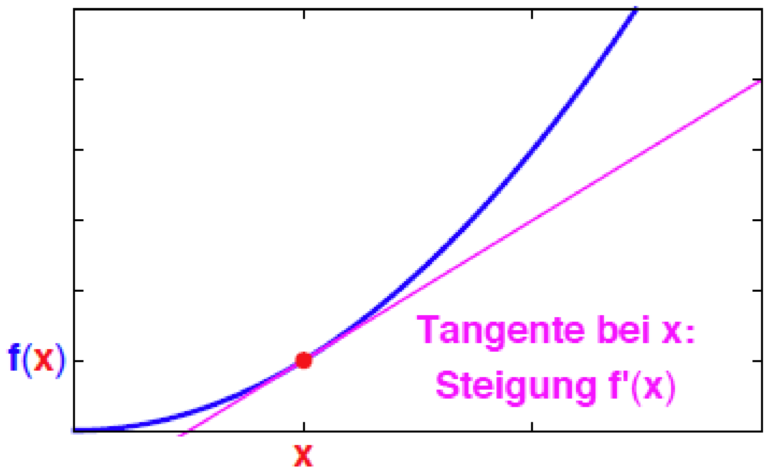


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

Ableitung = Steigung der Tangente

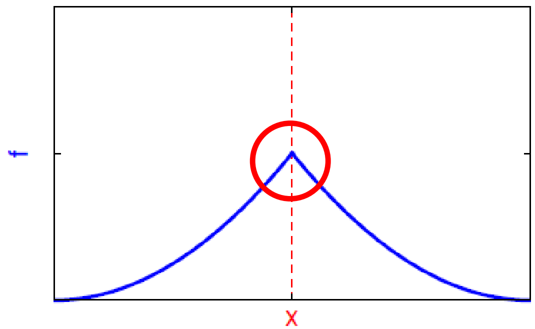


$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

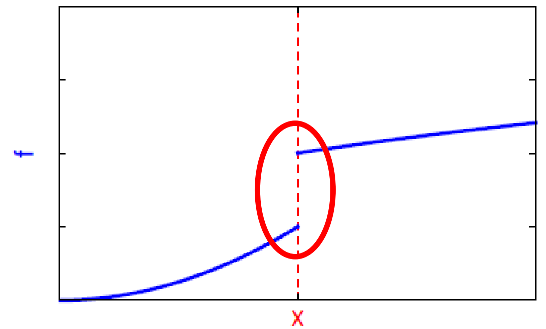
Ableitung der Funktion f am Punkt x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Wenn Ableitung (Grenzwert) nicht wohl-definiert: Funktion dort nicht differenzierbar



Knick



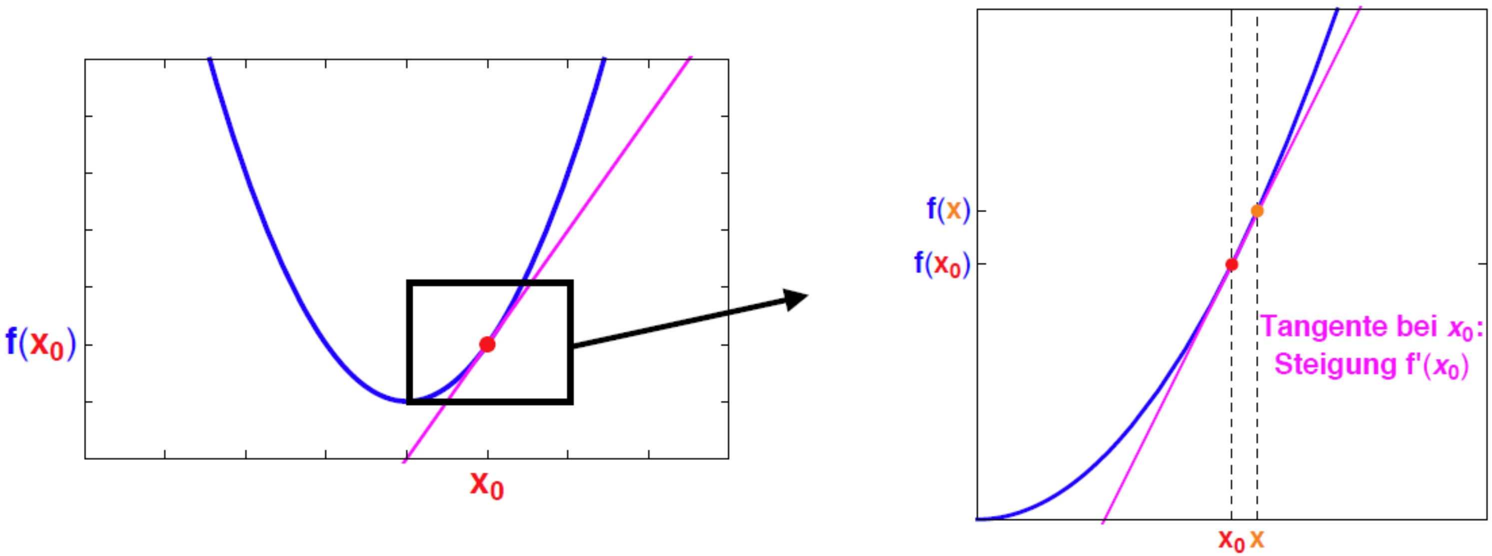
Sprung (Funktion unstetig)

➢ Die Funktionen sind bei x nicht differenzierbar.

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \neq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert



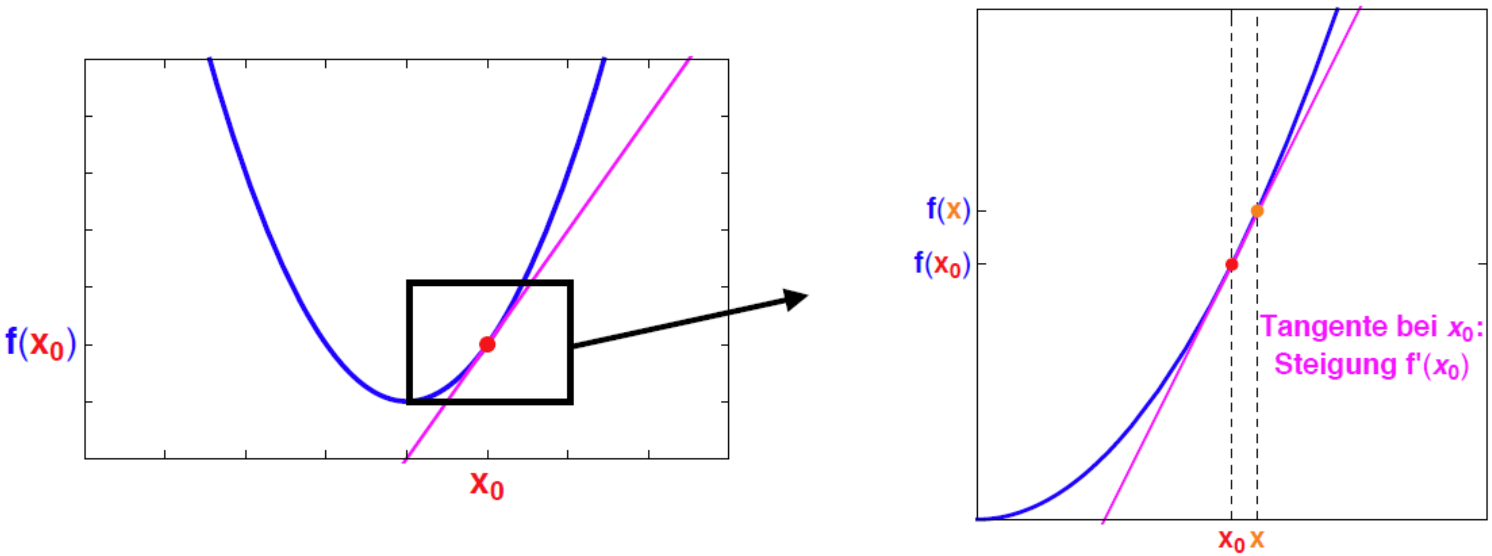
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$$

Differential $\mathrm{d}f$: infinitesimale Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von x

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert



Differential $\mathrm{d}f$: infinitesimale Änderung von f bei infinitesimaler Änderung von x

$$\mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

§ 3.1 Differentialrechnung: Grundbegriff

- Höhere Ableitungen: Ableitungen von Ableitungen

Zweite Ableitung: $$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

n-te Ableitung: $$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

- Ableitungen nach der Zeit t:

Abkürzung: Punkt über Funktion = Zeitableitung $$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$$

§ 3.2 Ableitungsregeln

- Ableitungen einiger wichtigen Funktionen:

Polynome und Potenzen: $$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1} \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exponentialfunktion: $$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

Natürlicher Logarithmus: $$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

Sinus: $$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

Kosinus: $$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

…

§ 3.2 Ableitungsregeln

- Beim Ableiten gelten folgende wichtige Regeln:

  - Ableitungen sind linear:

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\right) = \alpha\,\frac{df(x)}{dx} + \beta\,\frac{dg(x)}{dx} \qquad (\alpha,\ \beta\ \text{Zahlen})$$

  - Produktregel:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\, g(x)\right) = g(x)\,\frac{df(x)}{dx} + f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}$$

  - Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\,\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)\,\frac{df(x)}{dx} - f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}}{g(x)^2} = \frac{g(x)\, f'(x) - f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$$

§ 3.2 Ableitungsregeln

- Beim Ableiten gelten folgende wichtige Regeln:

  - Kettenregel:

$$\frac{d}{dx} f\left(g(x)\right) = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}$$

  - Ableitung der Umkehrfunktion:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{df(y)}{dy}}\Bigg|_{y=f^{-1}(x)}$$

§ 3.2 Ableitungsregeln

Regel von l'Hôpital: zur Berechnung von „pathologischen" Grenzwerten

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (falls dieser Grenzwert exisitert)

Beispiele: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = ?$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = ?$$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

Beispiel: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

- Gradient der Funktion f: Vektor aller partiellen Ableitungen

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Partielle Ableitungen:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\Rightarrow \quad \partial_i f(\vec{x}) = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(\ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{\Delta x_i}$$

- Gradient der Funktion f: Vektor aller partiellen Ableitungen

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\vec{x}) \\ \partial_2 f(\vec{x}) \\ \vdots \\ \partial_n f(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$

(Vektor der ersten partiellen Ableitungen)

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Die zweiten partiellen Ableitungen fasst man in der Hesse-Matrix zusammen:

$$H_f(\vec{x})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$$

- Laplace-Operator:

$$\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_2}$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Zweite partielle Ableitung:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Im Allgemeinen vertauschen die zweiten Ableitungen nicht:

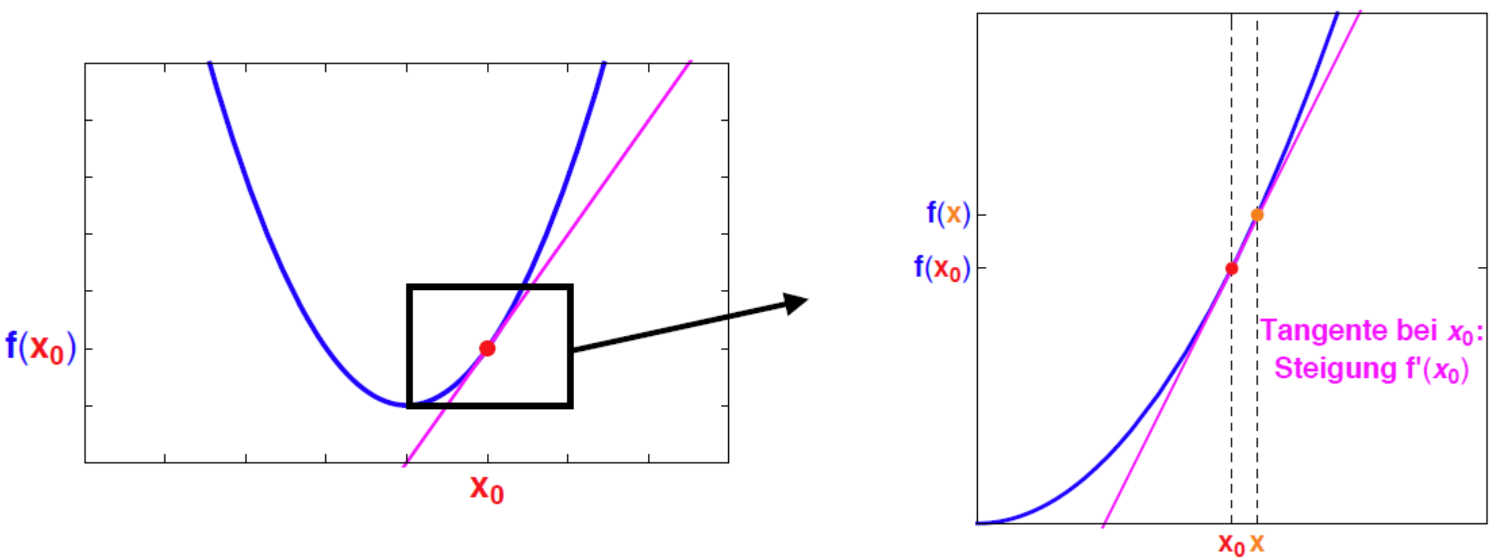
$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \neq \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Satz von Schwarz: Ableitungen vertauschen bei „netten“ Funktionen

Funktion f ist k mal stetig differenzierbar $\Rightarrow$ Alle l-ten Ableitungen mit $l \leq k$ vertauschbar!

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Nah bei x_0: Funktion wird durch Tangente genähert

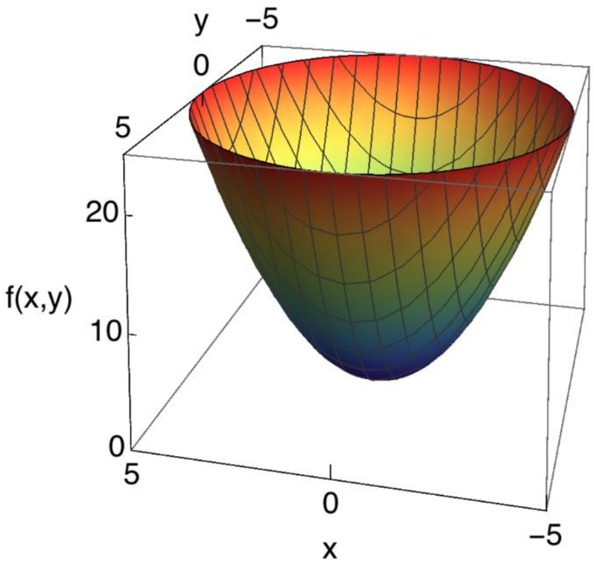


$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Bei Funktionen mehrerer Variablen: totales Differential



$$df(x) = f'(x)\,dx = \frac{df(x)}{dx}\,dx \quad \Rightarrow \quad df(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\,dx_i = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots$$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Totales Differential:

$$df(\vec{x}) = \sum_i \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}\, dx_i = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\, dx_2 + \dots$$

Beispiel: $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2) = \sin(x_1)e^{x_2}$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Rechenregeln für totale und partielle Ableitungen:

  - Die Ableitungsregeln verallgemeinern sich direkt von den Funktionen einer Variablen auf die Funktionen mehrerer Variablen.

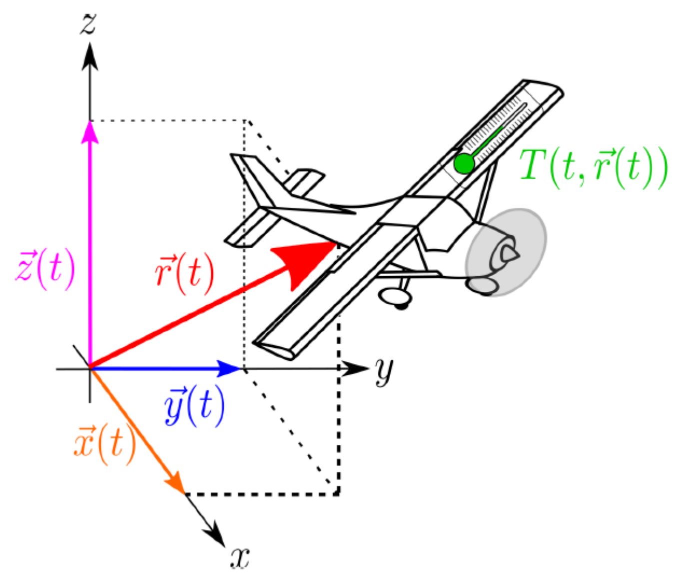
  - Man muss die Kettenregel für jede der Variablen durchführen.

Beispiel: $$\frac{dh(f(x),g(x))}{dx} = \frac{\partial h(f,g)}{\partial f}\frac{df(x)}{dx} + \frac{\partial h(f,g)}{\partial g}\frac{dg(x)}{dx}$$

§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

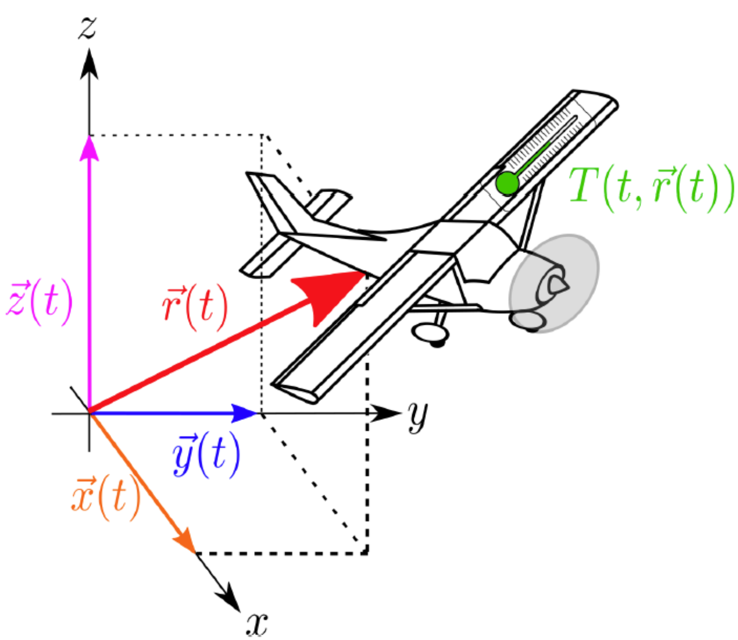
Beispiel: $T = T(\vec{r}(t), t) = T(x(t), y(t), z(t), t)$

$$\frac{\mathrm{d}T(\vec{r}(t), t)}{\mathrm{d}t} = ?$$



§ 3.3 Ableitungen von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel:



$$\underbrace{\frac{dT(\vec{r}(t),t)}{dt}}_{\text{total Ableitung nach der Zeit}} = \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial x}}_{\text{Ableitung nach } x} \underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{\text{totale Zeitableitung von } x}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial y}}_{\text{Ableitung nach } y} \underbrace{\frac{dy(t)}{dt}}_{\text{totale Zeitableitung von } y}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial z}}_{\text{Ableitung nach } z} \underbrace{\frac{dz(t)}{dt}}_{\text{totale Zeitableitung von } z}$$

$$+ \underbrace{\frac{\partial T(T(\vec{r}(t),t))}{\partial t}}_{\text{partielle Ableitung nach der Zeit}}$$