SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 6: Differentialrechnung

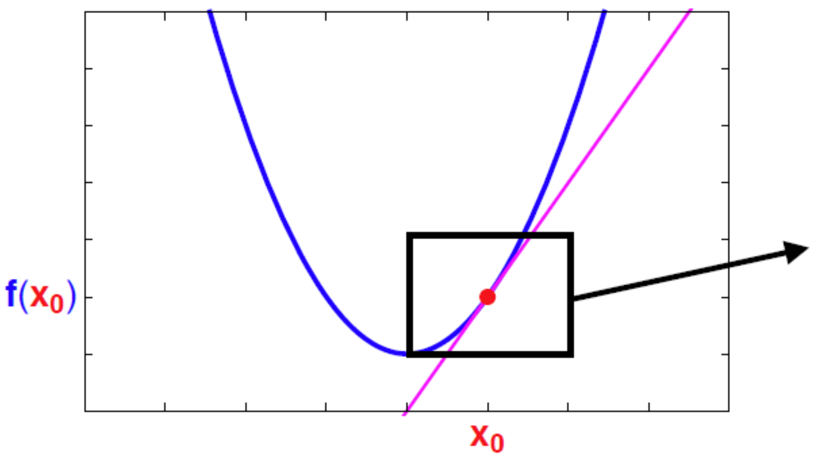
Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

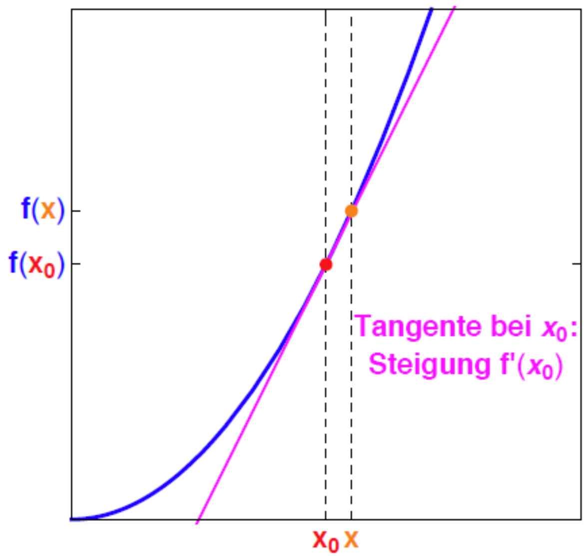
E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

November 14, 2022

§ 3.4 Taylorreihe

- Nah bei x: Funktion wird durch Tangente genähert





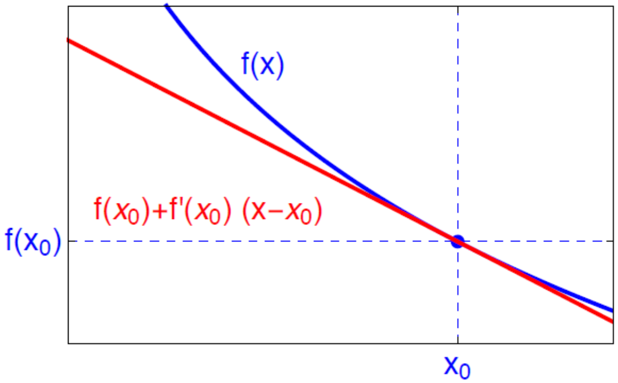
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad \Delta f = f'(x_0)\,\Delta x$$

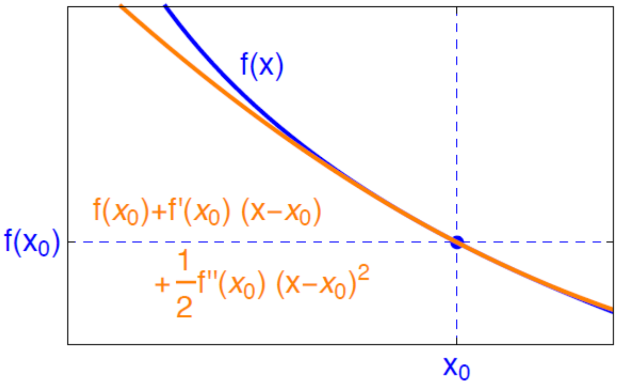
§ 3.4 Taylorreihe

- Wie können wir die Annäherung systematisch verbessern?

⇒ Taylorreihe



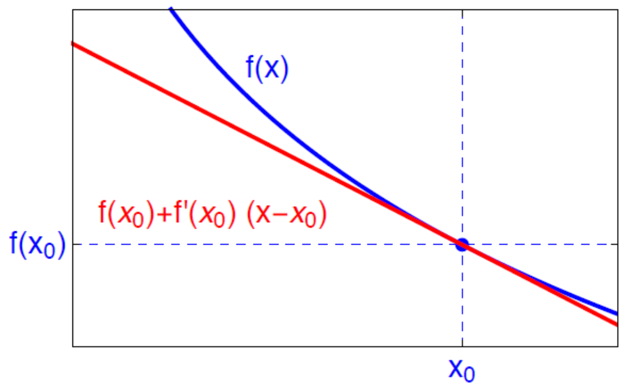
$\Rightarrow$



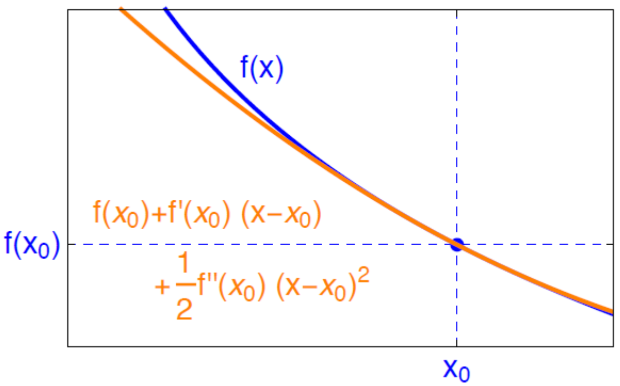
§ 3.4 Taylorreihe

- Wie können wir die Annäherung systematisch verbessern?

⇨ Taylorreihe



$\Rightarrow$



$$
\begin{aligned}
T f(x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$Tf(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots$$

  - Die Reihe $Tf(x, x_0)$ konvergiert nicht immer.

  - Selbst wenn $Tf(x, x_0)$ konvergiert, muss der Grenzwert nicht automatisch gleich $f(x)$ sein.

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$Tf(x, x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots$$

  - Die Reihe $Tf(x, x_0)$ konvergiert nicht immer.
  - Selbst wenn $Tf(x, x_0)$ konvergiert, muss der Grenzwert nicht automatisch gleich $f(x)$ sein.

- Trotzdem gilt $Tf(x, x_0) = f(x)$ in so vielen Fällen (insbesondere in der Physik). Dies ergibt eine systematische Annäherung der Funktionen.

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$
\begin{aligned}
Tf(x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel 1: Taylorreihe von $f(x) = e^x$ um $x_0 = 0$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe von $f(x)$ um den Punkt $x = x_0$:

$$
\begin{aligned}
Tf(x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \frac{1}{6} f'''(x_0)\,(x - x_0)^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel 2: Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$ um $x_0 = 0$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihen einiger wichtiger Funktionen um $x = 0$:

Exponentialfunktion: $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Natürlicher Logarithmus: $$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Sinus: $$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots$$

Kosinus: $$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$$

§ 3.4 Taylorreihe

- Was ist e^A (A: $n \times n$ quadratische Matrix)?

$$e^A = \mathbb{I}_{n\times n} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \cdots$$

Beispiel: $e^{\alpha A}$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$
\begin{aligned}
Tf(x_0+\delta x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\, \delta x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, \delta x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\Big|_{x=x_0} \\
&= e^{\delta x \frac{d}{dx}}\, f\Big|_{x=x_0}
\end{aligned}
$$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

$$
\begin{aligned}
Tf(x_0+\delta x, x_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,\delta x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\delta x^n \left(\frac{d}{dx}\right)^n f\Big|_{x=x_0} \\
&= e^{\delta x \frac{d}{dx}} f\Big|_{x=x_0}
\end{aligned}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{aligned}
Tf(\vec{x}_0+\delta\vec{x}, \vec{x}_0) &= e^{\delta\vec{x}\cdot\nabla} f\Big|_{\vec{x},\vec{x}_0} \\
&= f(\vec{x}_0) + \delta\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\delta\vec{x}\cdot\nabla)\,(\delta\vec{x}\cdot\nabla)\;f(\vec{x}_0) + \ldots
\end{aligned}
$$

Nabla-Operator: $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

$$
\begin{aligned}
T f(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}, \vec{x}_0) &= e^{\delta\vec{x}\cdot\nabla} \, f\big|_{\vec{x},\vec{x}_0} \\
&= f(\vec{x}_0) + \delta\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right)\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right) f(\vec{x}_0) + \dots
\end{aligned}
$$

Beispiel: Funktion von zwei Variablen $T(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, x_0, y_0)$

§ 3.4 Taylorreihe

- Taylorreihe einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

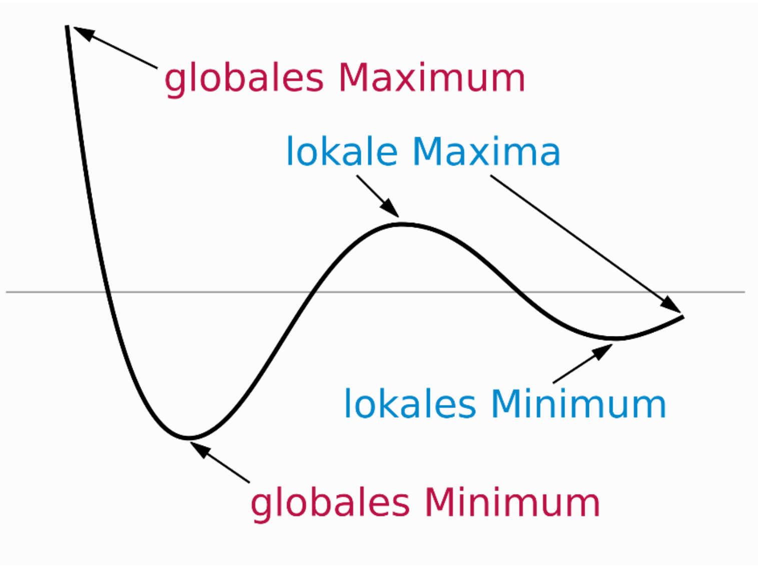
$$
\begin{aligned}
Tf(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}, \vec{x}_0) &= e^{\delta\vec{x}\cdot\nabla}\, f\big|_{\vec{x},\vec{x}_0} \\
&= f(\vec{x}_0) + \delta\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right)\left(\delta\vec{x}\cdot\nabla\right) f(\vec{x}_0) + \ldots
\end{aligned}
$$

Beispiel: Funktion von zwei Variablen (Satz von Schwarz verwendet!)

$$
\begin{aligned}
Tf(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, x_0, y_0) \approx{}& f(x_0, y_0) + \delta x\,\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \delta y\,\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\
&+ \frac{\delta x^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \delta x\delta y\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x\partial y} + \frac{\delta y^2}{2}\,\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

§ 3.5 Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:



von Wikipedia „Extremwert“

Minima und Maxima der Funktion $f(x) = \frac{\cos(3\pi x)}{x}$ im Bereich $0.1 \leq \ x \ \leq 1.1$

§ 3.5 Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} > 0$$ Funktion steigt bei x an

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0$$ Funktion ist bei x flach

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} < 0$$ Funktion fällt bei x ab

- Notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extrempunkts (Maximum oder Minimum):

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0$$

§ 3.5 Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

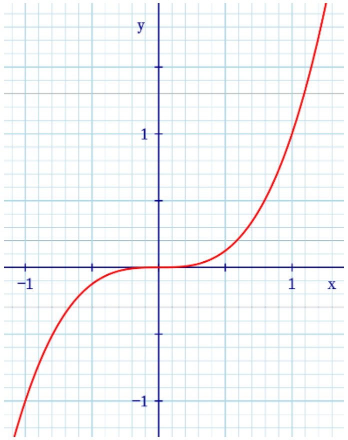
Beispiel 1: $f(x) = x^2 - 2x + 1$

§ 3.5 Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion einer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

Beispiel 2: $f(x) = x^3$



von Wikipedia
„Sattelpunkt“

§ 3.5 Bestimmung von Extremwerten

- Extremwerte einer skalaren Funktion mehrerer Variablen:

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} < 0 & \text{Lokales Maximum} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = 0 & \text{Sattelpunkt} \\ f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} > 0 & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla f(\vec{x}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} H_f(\vec{x}_0) \text{ hat nur negative Eigenwerte} & \text{Lokales Maximum} \\ \underline{H_f(\vec{x}_0)} \text{ hat nur positive Eigenwerte} & \text{Lokales Minimum} \end{cases}$$

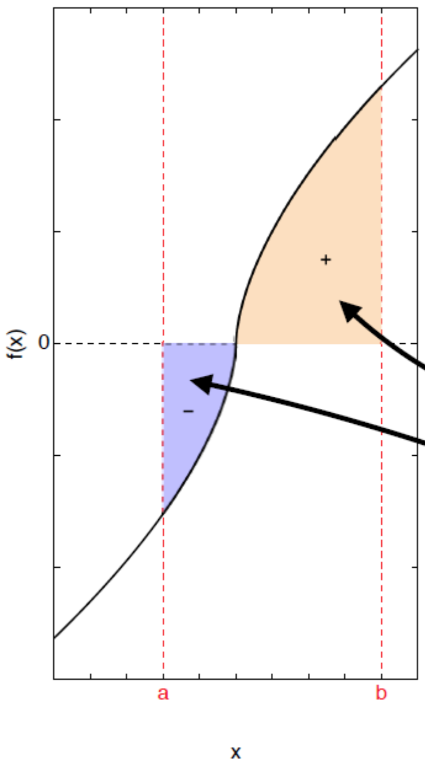
Hesse-Matrix $\quad H_f(\vec{x})_{ij} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}$

§ 3.5 Bestimmung von Extremwerten

Beispiel: Extremwerte von $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$?

§ 4. Integralrechnung

- Integral als Fläche:



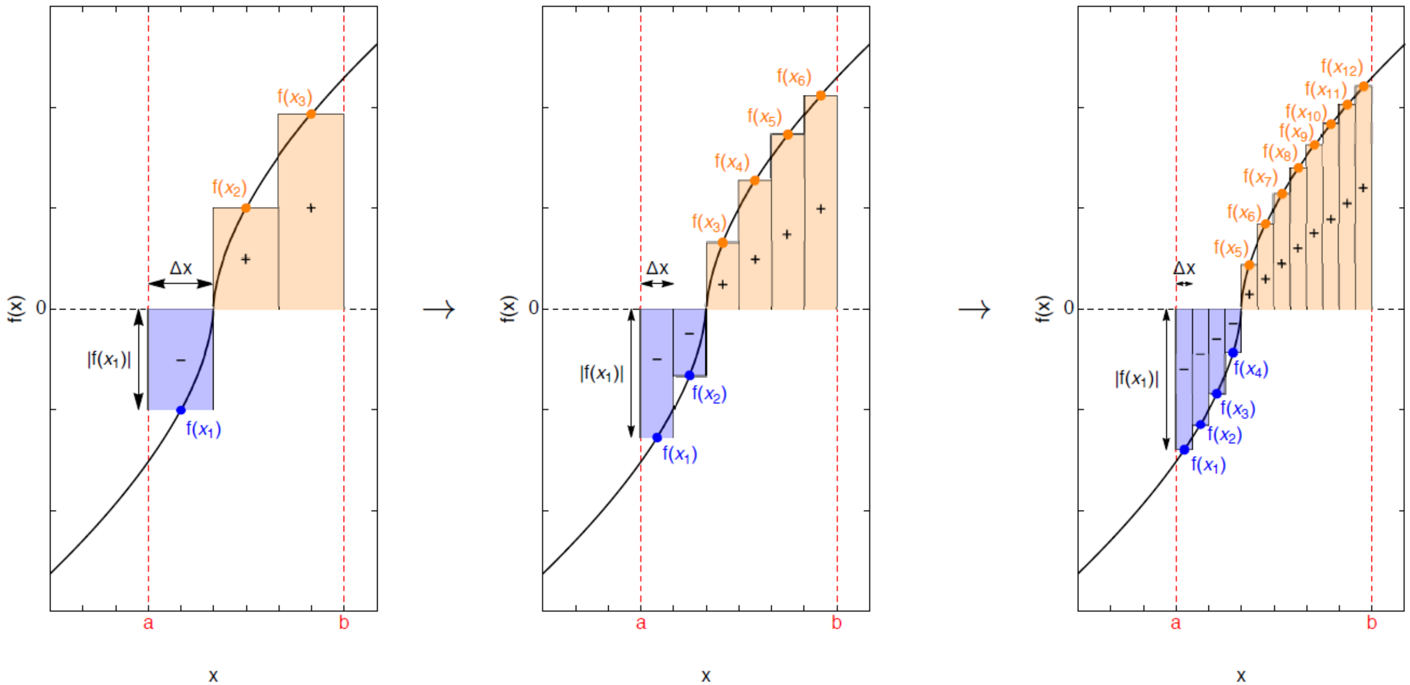
Integral $\int_a^b dx\, f(x)$:

Flächeninhalt unter Kurve mit

- Anteil über *x*-Achse: zählt positiv
- Anteil unter *x*-Achse: zählt negativ

§ 4. Integralrechnung

- Konstruktion des Integrals mit Rechtecken:

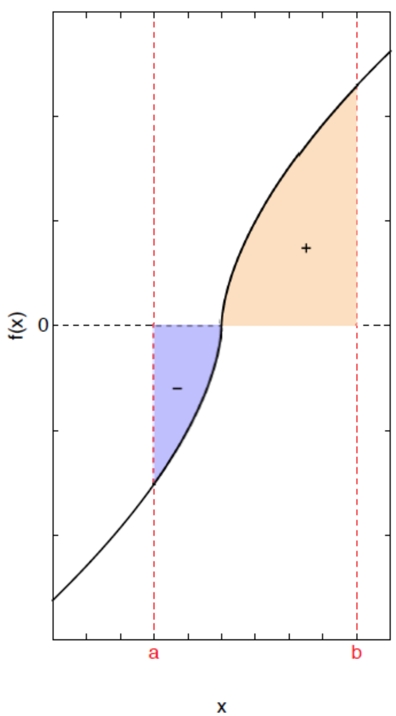


$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \underline{\Delta x\, f(x_i)}$$

(vorzeichenbehaftete)
Flächeninhalt des i-ten Rechtecks

§ 4. Integralrechnung

- Nomenklatur beim Integral:



obere Integralgrenze

Integrand

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

Differenzial

untere Integralgrenze

§ 4.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Definition der Stammfunktion:

$F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$ $\longleftrightarrow$ $\dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$

  - Stammfunktion ist nicht eindeutig: man kann beliebige Konstante addieren.

  - Integration und Differentiation sind mathematische Gegenstücke.

$$f(x) \xrightarrow{\int dx} F(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} f(x)$$

§ 4.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Ein paar wichtige Stammfunktionen:

Potenzen/Polynome: $f(x) = x^n \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

1/x: $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow F(x) = \ln(|x|)$

Exponentialfunktion: $f(x) = e^{\alpha\, x} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$

§ 4.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel 1: $\int_{-1}^{1} dx\, e^{3x} = ?$

§ 4.1 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

- Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel 2: $\int_0^1 dx \sin(2x) = ?$