TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

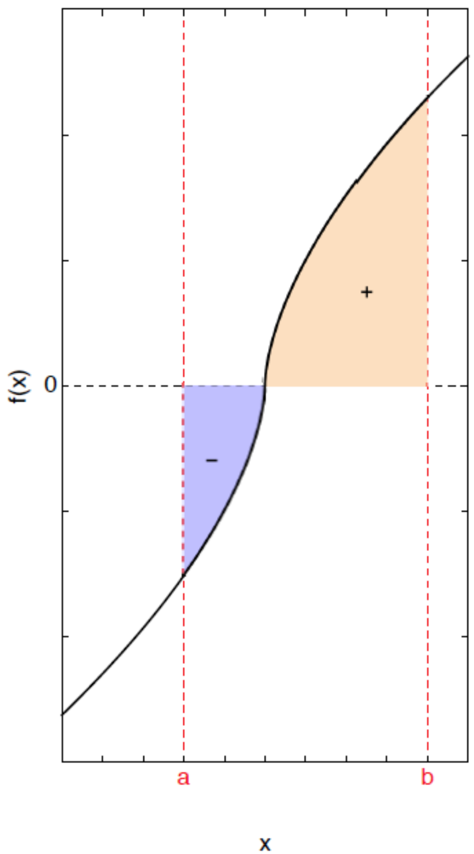
Vorlesung 7: Integration

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

November 21, 2022

§ 4.2 Uneigentliche Integrale



Berechnung eines Integrals über Stammfunktion:

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

- Achtung: Dies funktioniert so, wenn Funktion f nicht divergiert und $a, b \nrightarrow \pm\infty$.

§ 4.2 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliche Integrale:

  - Fall 1: Grenzen unendlich

Integral = Grenzwert von Grenzen nach unendlich

obere Grenze:
$$\int_a^\infty dx\, f(x) = \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

untere Grenze:
$$\int_{-\infty}^b dx\, f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b dx\, f(x)$$

beide Grenzen:
$$\int_{-\infty}^\infty dx\, f(x) = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c dx\, f(x) + \lim_{b\to\infty} \int_c^b dx\, f(x)$$

§ 4.2 Uneigentliche Integrale

- Uneigentliche Integrale:

  - Fall 2: Integrand unendlich an Stelle c

    Integral = Grenzwert von Grenzen nach c

$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{c-\epsilon} dx\, f(x) + \lim_{\delta \to 0} \int_{c+\delta}^b dx\, f(x)$$

Wichtig: Grenzwerte müssen unabhängig von einander genommen werden.

§ 4.2 Uneigentliche Integrale

Beispiel: $$\int_{-2}^{3} dx \, \frac{1}{x^2} = ?$$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:

  - Integrale sind linear:

$$\int_a^b dx \; (c_1 \, f(x) + c_2 g(x)) = c_1 \int_a^b dx \, f(x) + c_2 \int_a^b dx \, g(x) \qquad (c_1, c_2 \text{ Zahlen})$$

  - Integrationsintervalle können zerlegt werden:

$$\int_a^b dx \, f(x) = \int_a^c dx \, f(x) + \int_c^b dx \, f(x)$$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:
  - Vertauschen der Grenzen bringt ein Minus-Zeichen:

$$\int_a^b dx\, f(x) = - \int_b^a dx\, f(x)$$

  - Man kann nach Integralgrenzen ableiten:

$$\frac{d}{db} \int_a^b dx\, f(x) = \frac{d}{db} \left(F(b) - F(a)\right) = f(b)$$

$$\frac{d}{da} \int_a^b dx\, f(x) = \frac{d}{da} \left(F(b) - F(a)\right) = -f(a)$$

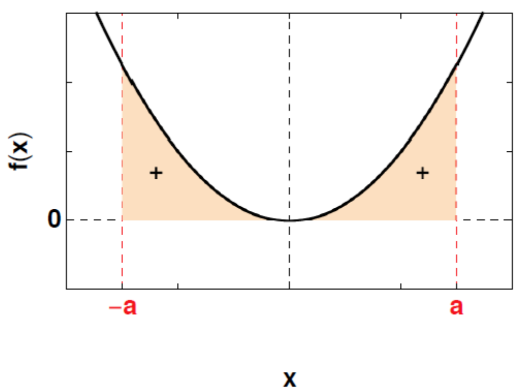
§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:

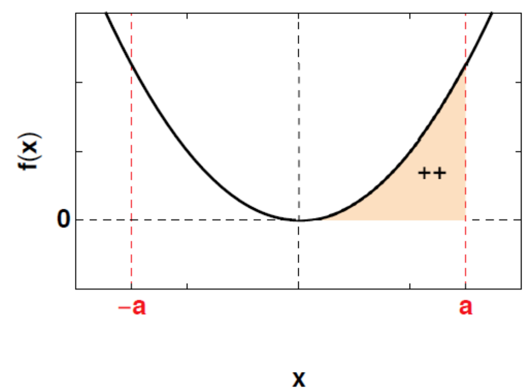
  - Symmetrien erleichtern das Integrieren:

    Fall 1: Funktion achselsymmetrisch („gerade“):

$$f(x) = +f(-x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 2 \int_{0}^{a} dx\, f(x)$$



= 2



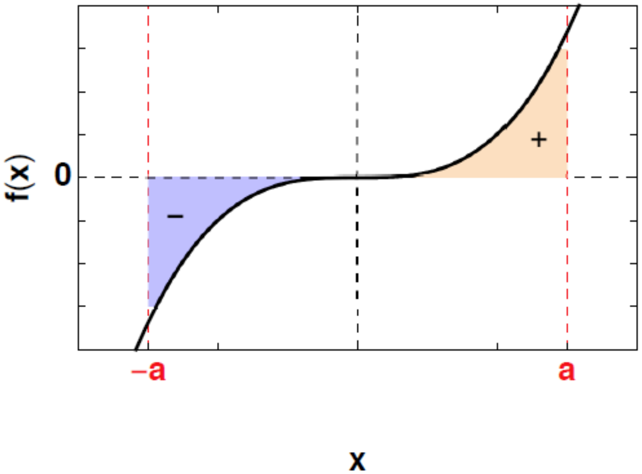
§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Für Integrale gelten die folgende Rechenregeln:

  - Symmetrien erleichtern das Integrieren:

    Fall 2: Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung („ungerade“):

$$f(x) = -f(-x) \quad \Rightarrow \quad \int_{-a}^{a} dx\, f(x) = 0$$



$= \quad 0$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Beispiel: $\int_0^1 dx \sin(2x+1) = ?$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Verschiebetrick: $x = g(u) = u - x_0$

$$\int_a^b dx\, f(x + x_0) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} du\, f(u)$$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - Variablensubstitution:

$$\int_a^b dx\, f(x)$$

$$x = g(u)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Reskalierungstrick: $x = g(u) = \dfrac{u}{\lambda}$

$$\int_a^b dx\, f(\lambda\, x) = \int_{\lambda\, a}^{\lambda\, b} du\, \frac{1}{\lambda} f(u)$$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  - Partielle Integration:

$$\int_a^b dx\, \frac{df(x)}{dx}\, g(x) = [f(x)\, g(x)]_a^b - \int_a^b dx\, f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}$$

Beweis mit der Produktregel der Ableitung:

$$\frac{d}{dx}\, (f(x)\, g(x)) = \frac{df(x)}{dx}\, g(x) + f(x)\, \frac{dg(x)}{dx}$$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  ➢ Partielle Integration:

$$\int_a^b dx \, \frac{df(x)}{dx} \, g(x) = [f(x) \, g(x)]_a^b - \int_a^b dx \, f(x) \, \frac{dg(x)}{dx}$$

Beispiel 1: $\int_0^1 dx \, x e^x = ?$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:

  ➢ Partielle Integration:

$$\int_a^b dx \, \frac{df(x)}{dx} \, g(x) = \left[f(x) \, g(x) \right]_a^b - \int_a^b dx \, f(x) \, \frac{dg(x)}{dx}$$

Beispiel 2: $\int_0^1 dx \, x \ln(x) = ?$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - ➢ Man muss oft verschiedene Regeln und Tricks kombinieren.

Beispiel 1: $\int_0^1 dx\,\sqrt{1-x^2} = ?$

§ 4.3 Rechenregeln für Integrale

- Ein paar Tricks zum Berechnen von Integralen:
  - ➢ Man muss oft verschiedene Regeln und Tricks kombinieren.

Beispiel 2: $$\int_0^1 dx\, \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = ?$$

§ 4.4 Integrale von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

- Falls Integral nur bezüglich einer Variablen gilt, werden andere Variablen werden als Konstanten betrachtet.

  - Unbestimmtes Integral:

$$\int dx_i\, f(x_1, \ldots, x_n) = F_i(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{mit} \quad \frac{d}{dx_i} F_i(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

Stammfunktion bezüglich x_i

  - Bestimmtes Integral: Stammfunktion in Grenzen

$$\int_a^b dx_i\, f(x_1, \ldots, x_n) = F_i(x_1, \ldots, b, \ldots, x_n) - F_i(x_1, \ldots, a, \ldots, x_n)$$

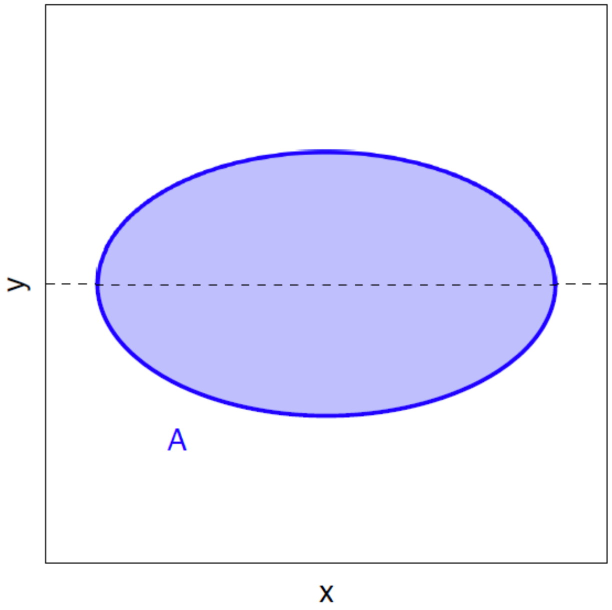
§ 4.4 Integrale von skalaren Funktionen mehrerer Variablen

Beispiel: $$\int_0^1 dx\, e^{xy} = ?$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

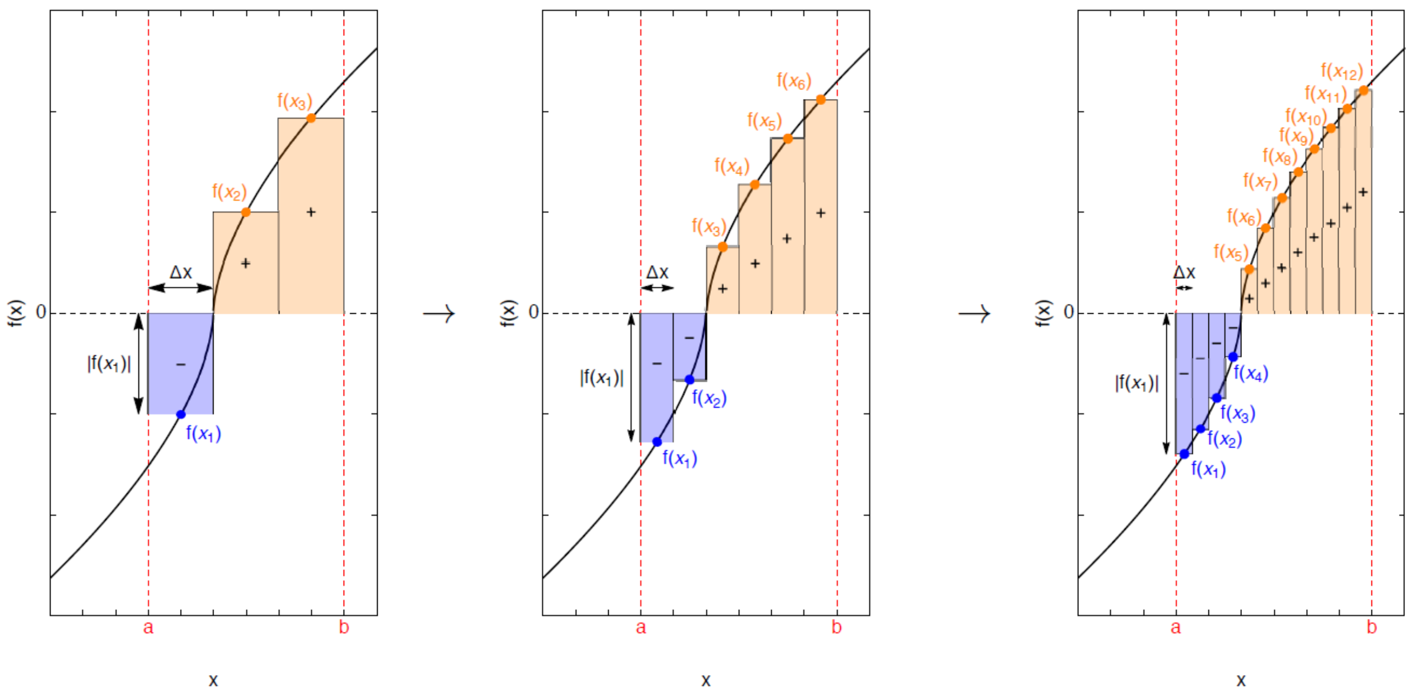
- Flächenintegrale: die Idee

Was ist Flächeninhalt A von beliebigem „Klecks“?



§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Erinnerung: „normale" Integrale



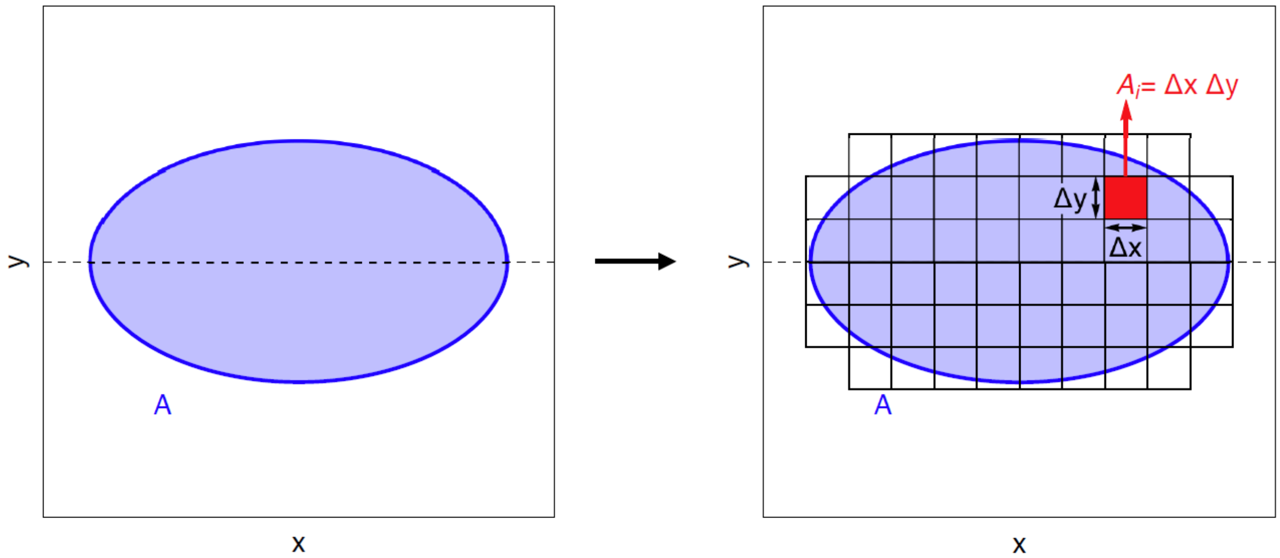
$$\int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i \underline{\Delta x\, f(x_i)}$$

vorzeichenbehafteter
Flächeninhalt des i-ten Rechtecks

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Flächenintegral als Grenzwert kleiner Teilflächen:

Flächeninhalt A als Summe vieler kleiner Teilflächen

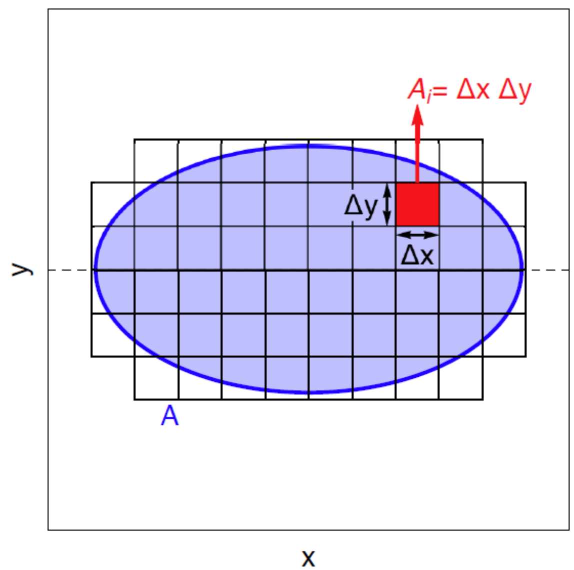


$$A \approx \sum_i A_i = \sum_i \Delta x \, \Delta y$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Flächenintegral als Grenzwert kleiner Teilflächen:

Flächeninhalt A als Summe vieler kleiner Teilflächen



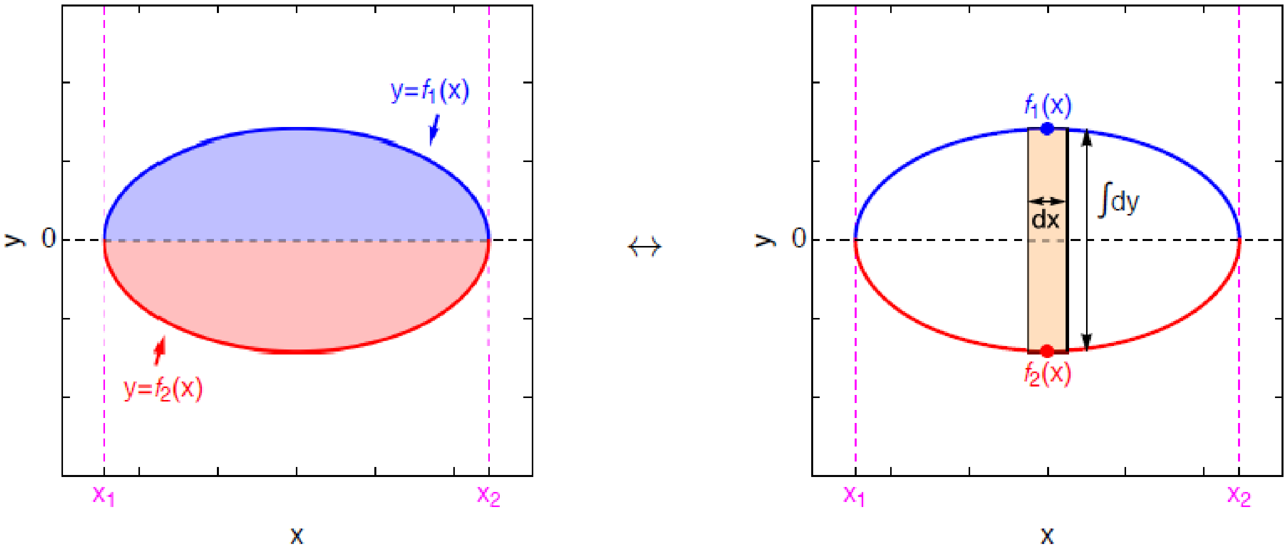
$$A \approx \sum_i A_i = \sum_i \Delta x\, \Delta y$$

$$A = \int_{\text{umrandete Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i A_i$$

Notation: $\displaystyle \int_{\text{Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \Delta x \Delta y = \int \int_{\text{Fläche}} dx dy = \int \int_{\text{Fläche}} d^2 r$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

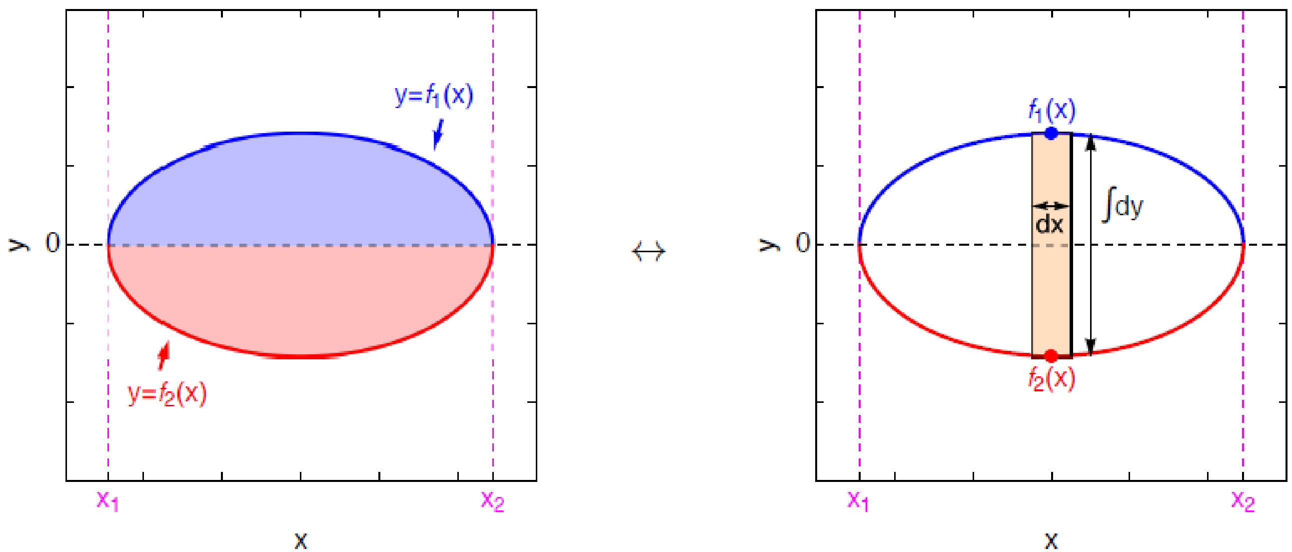
- Praktische Berechnung des Flächenintegrals:



Berechnung: über verschachtelte „normale“ Integrale!

§ 4.5 Mehrfachintegrale

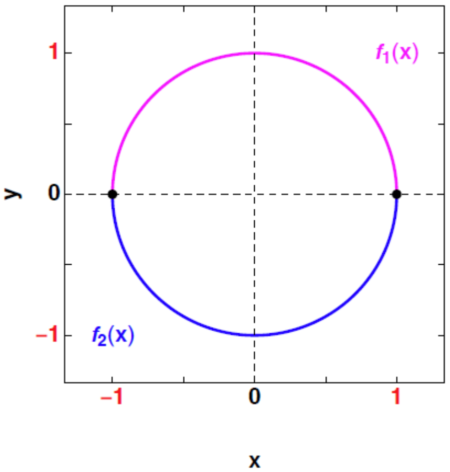
- Praktische Berechnung des Flächenintegrals:



$$A = \int_{x_1}^{x_2} dx\, f_1(x) - \int_{x_1}^{x_2} dx\, f_2(x) = \int_{x_1}^{x_2} dx\, \left(f_1(x) - f_2(x)\right) = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



- Was sind die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$, die den Kreis oben & unten berandeten?

- Was ist der Flächeninhalt des Einheitskreises?