TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 8: Integration

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

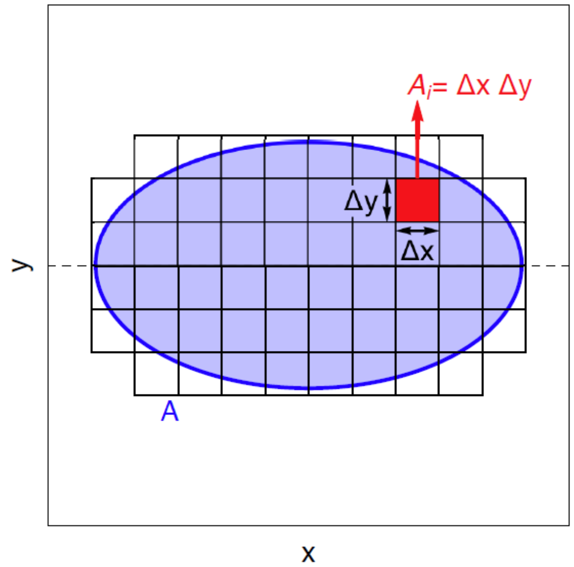
E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

November 28, 2022

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Erinnerung: Flächenintegral

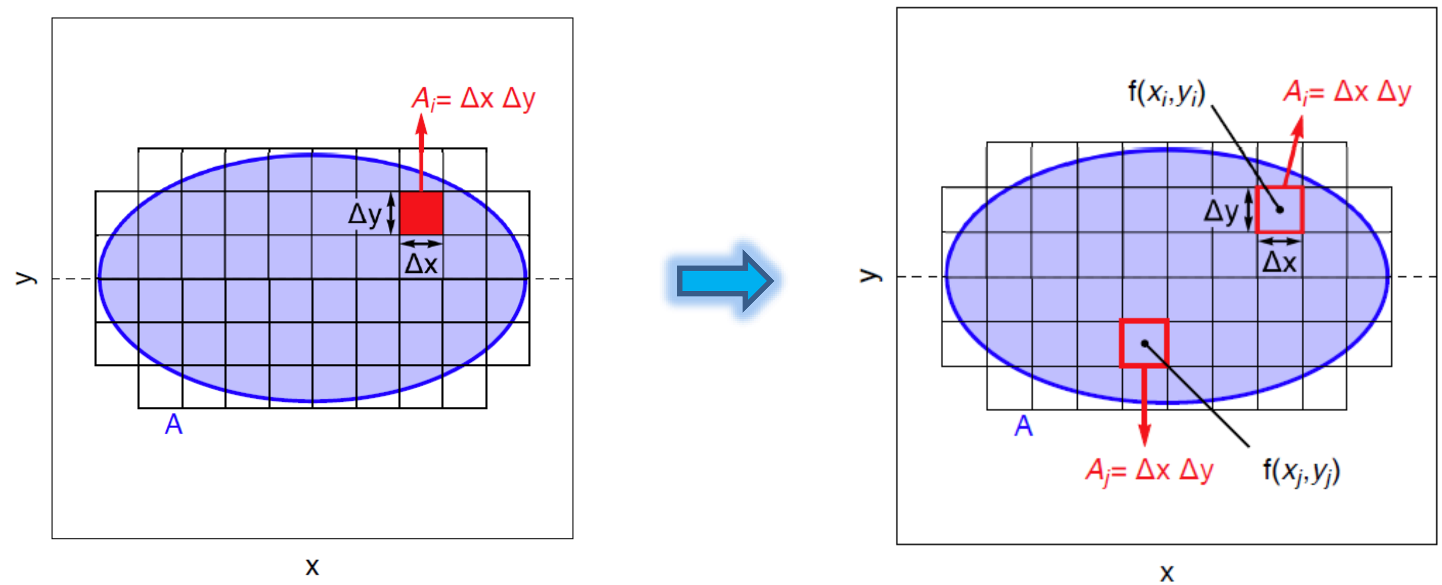
$$\int_{\text{Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \Delta x \Delta y = \int \int_{\text{Fläche}} dx dy = \int \int_{\text{Fläche}} d^2 r$$



§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Im Allgemeinen: Flächenintegral einer Funktion

$$\int_{\text{Fläche}} dA = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i \Delta x \Delta y = \int \int_{\text{Fläche}} dx dy = \int \int_{\text{Fläche}} d^2 r$$



$$\int \int_A dx\, dy\, \underline{f(x,y)} = \int \int_A f(x,y)\, dx\, dy = \int dx \int dy\, f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \sum_i A_i\, f(x_i, y_i)$$

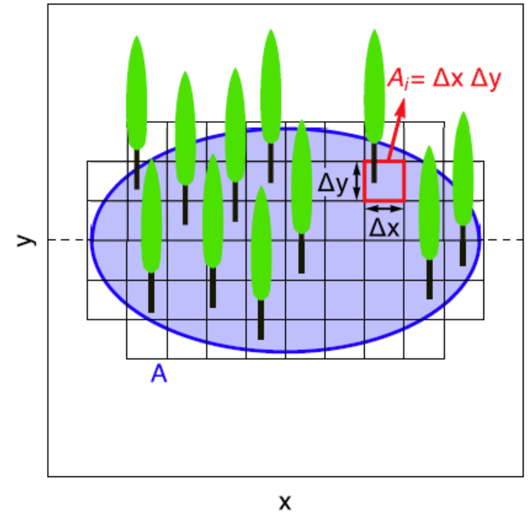
§ 4.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Baumzahl als Flächenintegral

$$\text{Anzahl Bäume} = \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume in Quadrat } i$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume pro Fläche} \cdot \text{Fläche}$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \underline{\text{Baum-Dichte}} \cdot \text{Fläche}$$

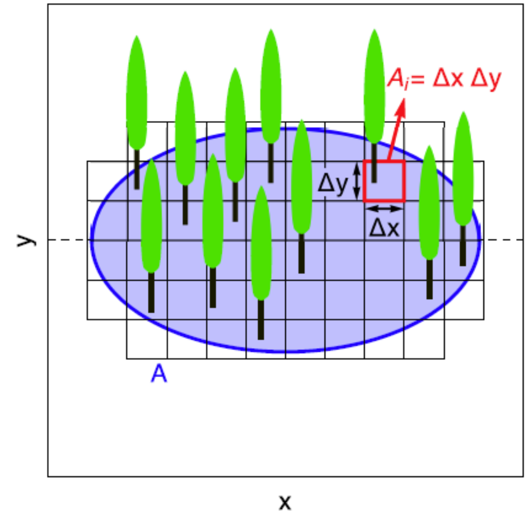


$$\rho_{\text{Baum}}(\text{Quadrat } i) = \frac{\text{Anzahl Bäume im Quadrat } i}{\text{Fläche des Quadrats } i}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_{\text{Baum}}(x, y) = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{\text{Fläche direkt unterhalb des Baums}} \end{cases}$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Baumzahl als Flächenintegral



$$\text{Anzahl Bäume} = \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume in Quadrat } i$$

$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \text{Bäume pro Fläche} \cdot \text{Fläche}$$

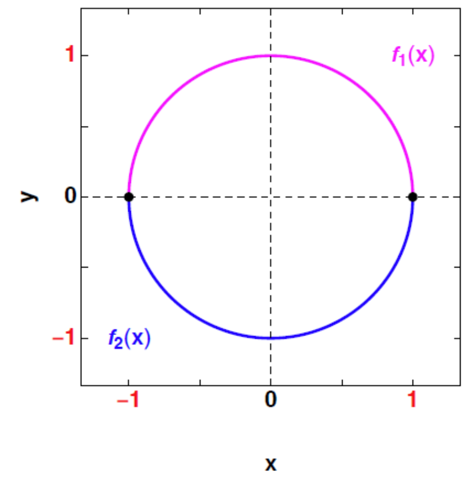
$$= \sum_{\text{Quadrate } i} \underline{\text{Baum-Dichte}} \cdot \text{Fläche}$$

$$= \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum_{\text{Quadrate } i} \rho_{\text{Baum}}(\text{Quadrat } i) \Delta x \Delta y$$

$$= \int dA\, \rho_{\text{Baum}}(x,y) = \int \int_A dx dy\, \rho_{\text{Baum}}(x,y)$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

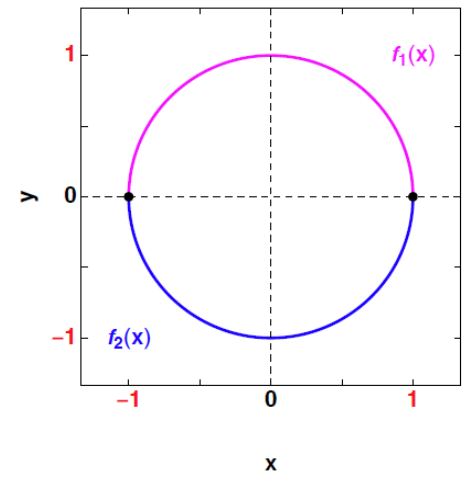
Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} y^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;= ?$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

Beispiel: Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} y^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=?$$

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\;y^2\sqrt{1-x^2} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\;\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\sqrt{1-x^2}$$

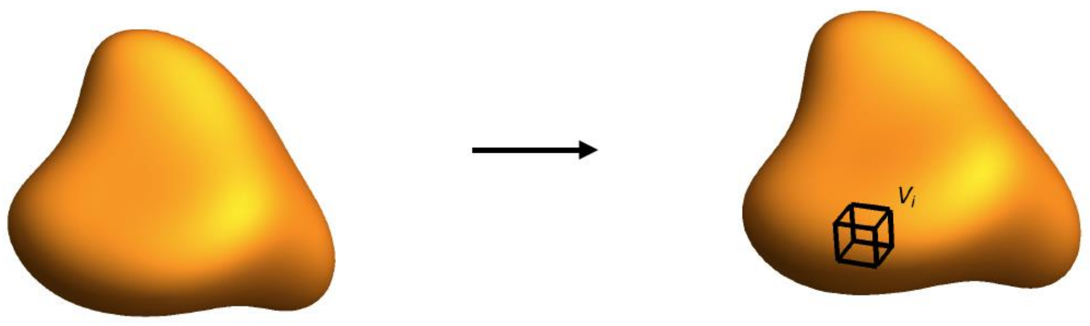
$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\;\frac{2}{3}(1-x^2)^2 = \frac{2}{3}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\;(1-2x^2+x^4)$$

$$= \frac{2}{3}\left(2-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right) = \frac{32}{45}$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Volumenintegral als Grenzwert kleiner Teilvolumen:

Was ist das Volumen dieses Blobs?



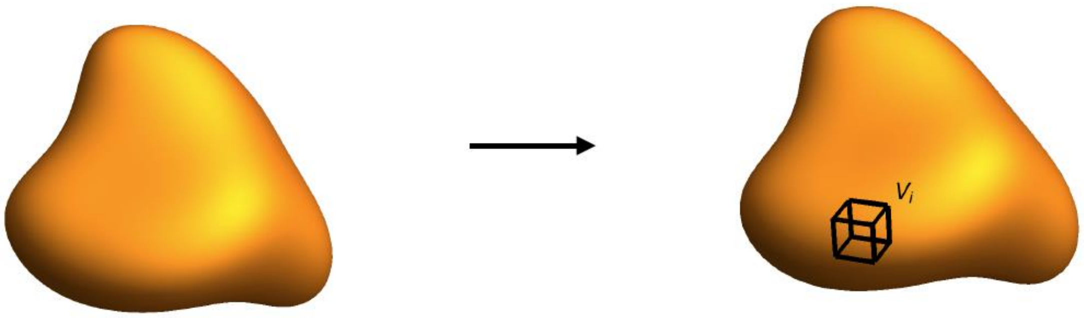
$$V \approx \sum_i V_i = \sum_i \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

$$V = \int_{\text{Volumen des Blobs}} dV = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_i V_i$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Volumenintegral als Grenzwert kleiner Teilvolumen:

Was ist das Volumen dieses Blobs?

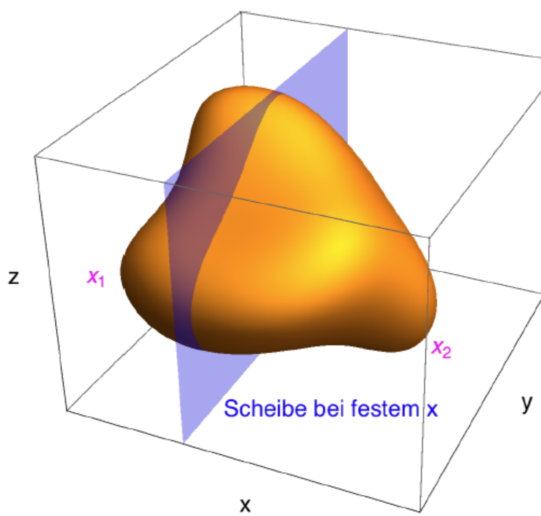


$$V = \int_{\text{Volumen des Blobs}} dV = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_i V_i$$

$$\int dV = \int dx \int dy \int dz = \int \int \int dx\, dy\, dz = \int d^3 r$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Praktische Berechnung des Volumenintegrals:



$A(x)$ = Flächeninhalt der Scheibe bei x

$$V = \int dV = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{dx\, A(x)}$$

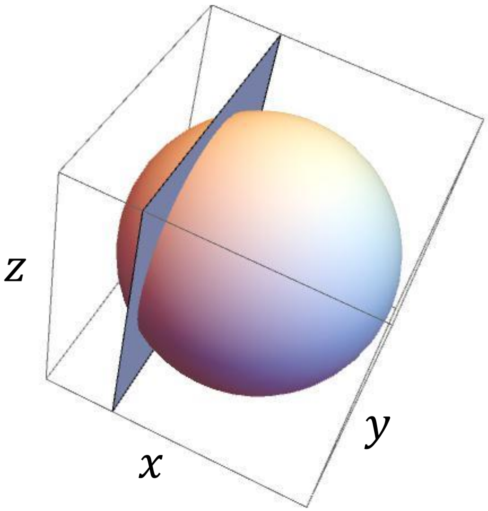
dx $A(x)$ = infinitesimales Volumen der Scheibe bei x

$$V = \int_{x_1}^{x_2} dx \underbrace{\int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy \int_{h_2(x,y)}^{h_1(x,y)} dz}_{\text{Flächenintegral } A(x)}$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

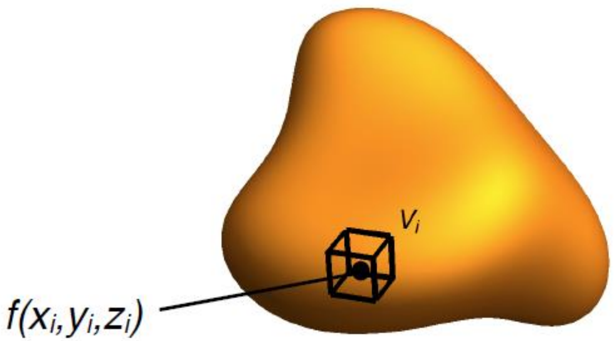
Beispiel: Einheitskugel, definiert über $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$V = \iiint_{\text{Einheitskugel}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$$



§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Im Allgemeinen: Volumenintegral einer Funktion



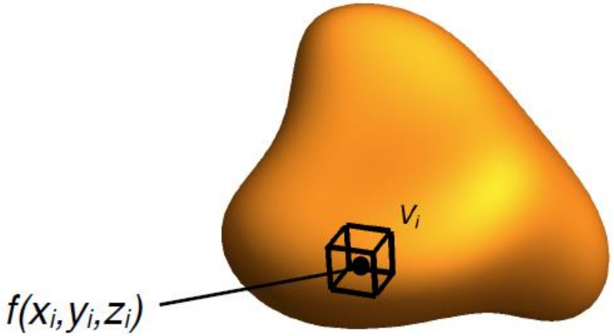
$$\int dV\, \underline{f(x,y,z)} = \int dx \int dy \int dz\, f(x,y,z) = \int\int\int dx\, dy\, dz\, f(x,y,z) = \int d^3r\, f(x,y,z)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_i V_i\, f(x_i, y_i, z_i)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \lim_{\Delta z \to 0} \sum_i \Delta x\, \Delta y\, \Delta z\, f(x_i, y_i, z_i)$$

§ 4.5 Mehrfachintegrale

- Viele Variablen (nicht nur x, y, z): sehr ähnlich!



$$\int d^n r\, f(x_1, \ldots, x_n) = \int dx_1 \ldots \int dx_n\, f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta x_i \right) f(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$$

Berechnung: auch wieder durch verschachtelte „normale“ Integrale

§ 4.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

- Bei Ableitungen: Satz von Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j f = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}$$

Im Allgemeinen vertauschen die zweiten Ableitungen NICHT:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_j} \neq \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Satz von Schwarz: Ableitungen vertauschen bei „netten“ Funktionen

Funktion f ist k mal stetig differenzierbar $\Rightarrow$ Alle l-ten Ableitungen mit $l \leq k$ vertauschbar!

§ 4.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

- Bei Integralen: Satz von Fubini

$$\int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) \stackrel{?}{=} \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)$$

  - Integrale dürfen im Allgemeinen nicht vertauscht werden!
  - Integrale können sicher vertauscht werden, wenn sie

    i) feste Grenzen haben und ii) der Integrand stetig ist.

Physikerpraxis: Meistens (aber eben nicht immer) vertauschen Integrale

§ 4.6 Reihenfolge und Vertauschung von Integralen

Gegenbeispiel: Integralgrenzen hängen von Variablen ab

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y = ? \qquad\qquad \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x = ?$$

§ 4.7 Integrale von vektorwertigen Funktionen

- Mehrfachintegrale von vektorwertigen Funktionen:

$$\vec{f}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{e}_j \, f_j(\vec{r})$$

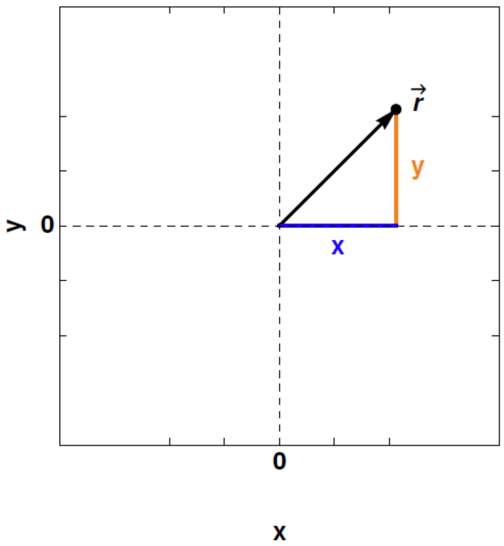
$$\Downarrow$$

$$\int d^n r \, \vec{f}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{m} \vec{e}_j \int d^n r \, f_j(\vec{r})$$

Führe Integration komponentenweise durch!

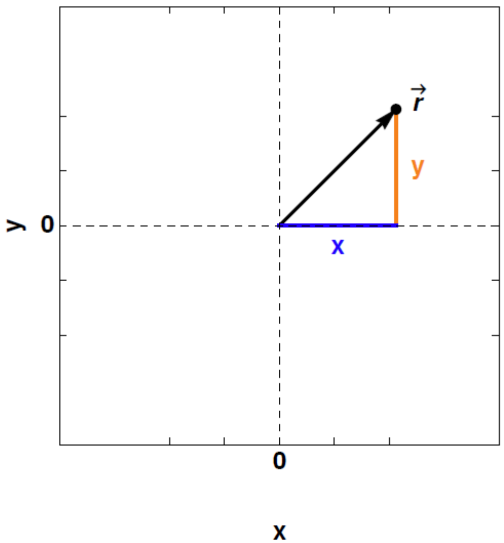
§ 5. Krummlinige Koordinaten

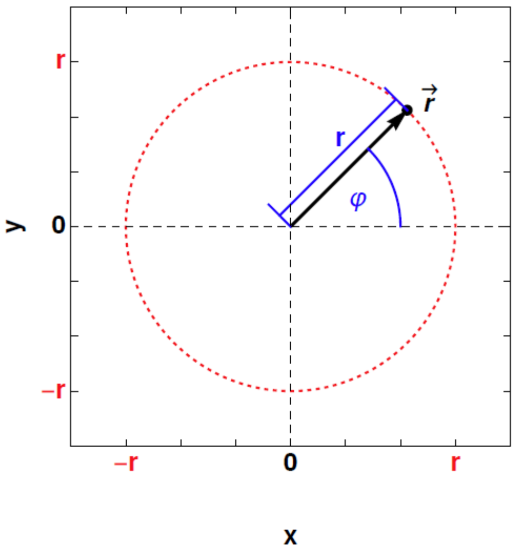
2D: kartesische Koordinaten (x- und y-Koordinaten)



§ 5.1 Polarkoordinaten

2D: kartesische Koordinaten (x- und y-Koordinaten)

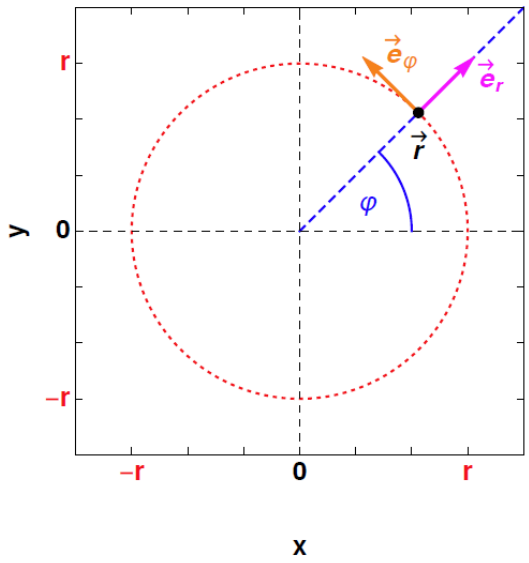




Alternative Möglichkeit: Angabe von Radius r und Winkel φ (Polarkoordinaten)

§ 5.1 Polarkoordinaten

Polarkoordinaten in 2D:



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

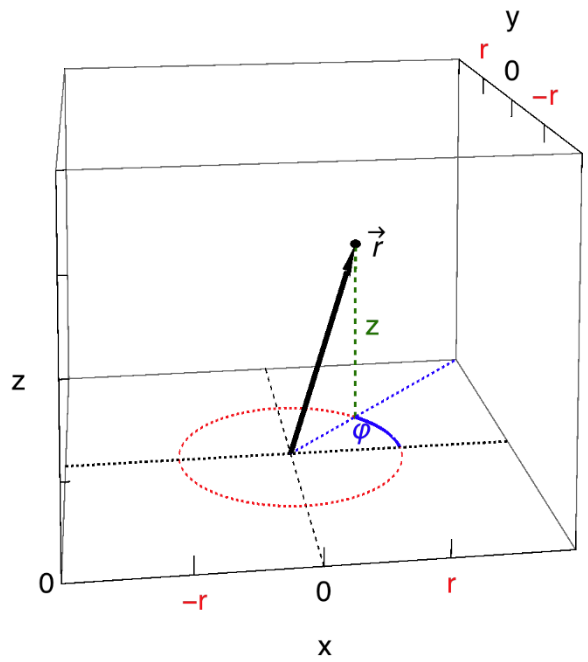
$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad r \in [0, \infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

Einheitsvektoren: $\vec{e}_r(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{e}_\varphi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$

§ 5.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten: 3D Verallgemeinerung von Polarkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\,\cos(\varphi) \\ \rho\,\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

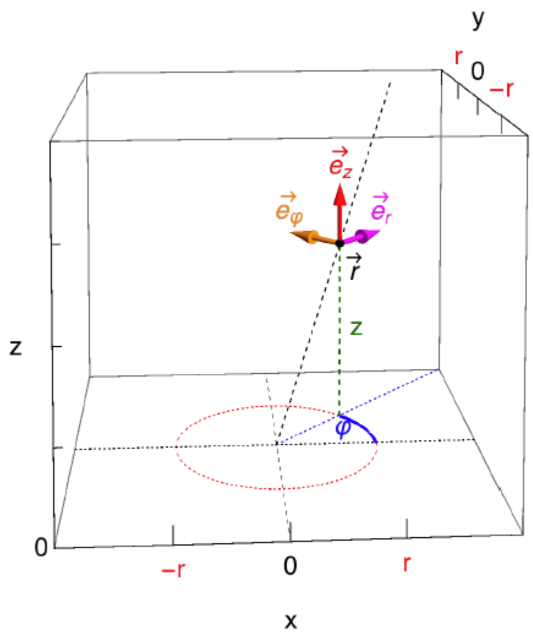
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \rho \in [0, \infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$z \in]-\infty, \infty[$$

§ 5.2 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten: 3D Verallgemeinerung von Polarkoordinaten



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

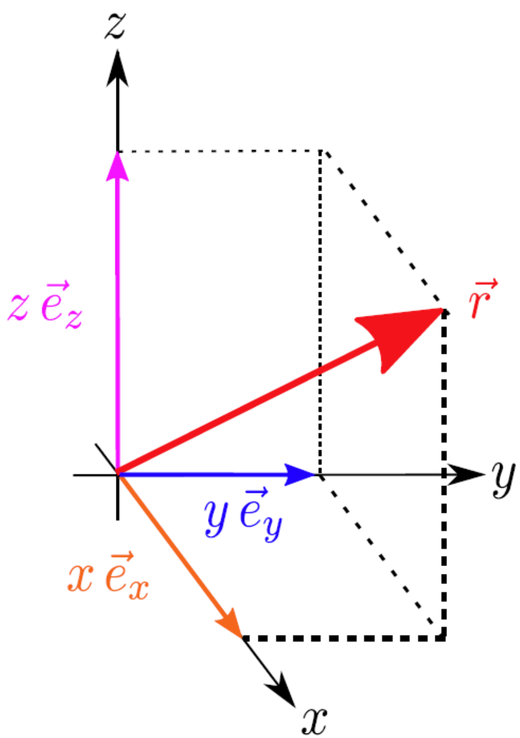
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \rho \in [0, \infty[$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

$$z \in]-\infty, \infty[$$

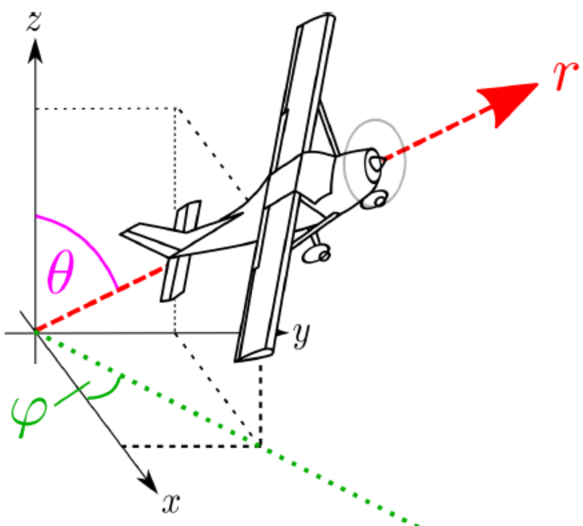
Einheitsvektoren: $\vec{e}_\rho(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_\varphi(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{e}_z(\rho, \varphi, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

§ 5.3 Kugelkoordinaten



kartesische Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

§ 5.3 Kugelkoordinaten



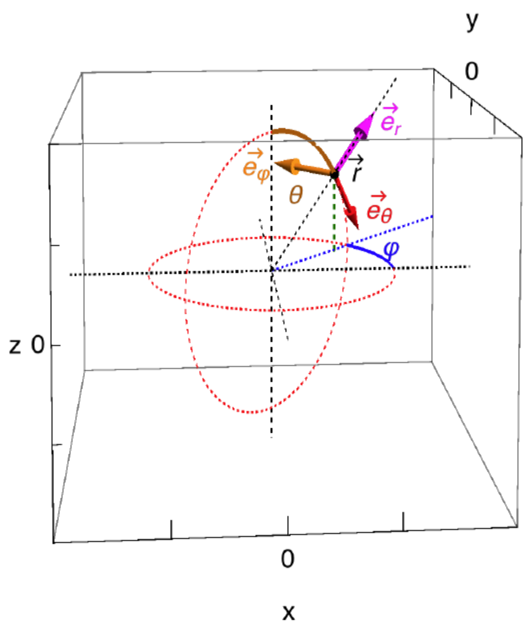
kartesische Koordinaten: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Kugelkoordinaten: Angabe von (r, θ, φ)

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \sin(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

§ 5.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten: Einheitsvektoren



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \to \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\,\cos(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\sin(\varphi)\,\sin(\theta) \\ r\,\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \Rightarrow \quad r \in [0, \infty[$$

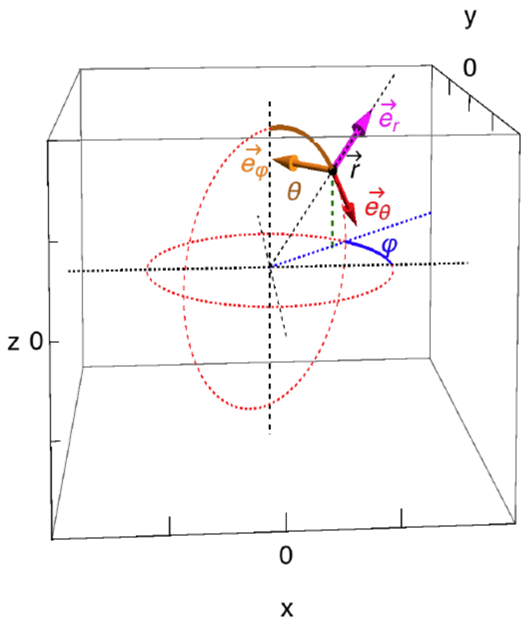
$$\theta \in [0, \pi]$$

$$\varphi \in [0, 2\pi[$$

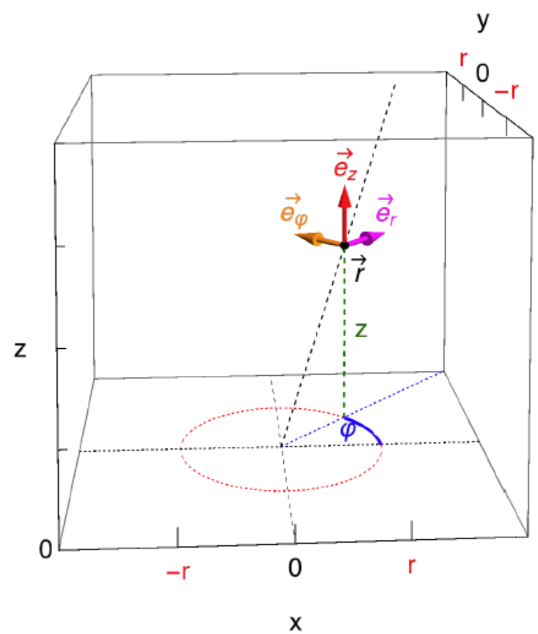
$$\vec{e}_r(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\,\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\theta(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\,\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\,\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_\varphi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

§ 5.3 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten



Zylinderkoordinaten



Q: Welches Koordinatensystem ist praktischer?

A: Es hängt vom Problem ab. Wenn Problem eher kugelsymmetrisch ist, sind Kugelkoordinaten einfacher.