TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

DRESDEN concept

SFB 1143

Rechenmethoden Lehramt Physik (WS22/23)

Vorlesung 9: Krummlinige Koordinaten + Vektoranalysis

Hong-Hao Tu (*ITP, TU Dresden*)

E-Mail: hong-hao.tu@tu-dresden.de

Dezember 5, 2022

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Erinnerung: Variablensubstitution bei Integralen

$$x \quad \to \quad u = g^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b dx\, f(x) = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} du\, \frac{dg(u)}{du}\, f(g(u))$$

Verallgemeinerung auf mehrdimensionale Integrale, z.B.

… von kartesischen Koordinaten in 2D zu Polarkoordinaten?

… von kartesischen Koordinaten in 3D zu Zylinderkoordinaten?

… von kartesischen Koordinaten in 3D zu Kugelkoordinaten?

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

- Transformationssatz in 3 Schritten:
  - Schritt 1: drücke alte Variablen als Funktion der neuen Variablen aus

$$x_i = x_i(u_1, \dots, u_n) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

  - Schritt 2: Berechne die „Jacobi-Matrix" (Matrix der ersten partiellen Ableitungen)

$$\mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u})\big|_{ij} = \frac{\partial x_i(\vec{u})}{\partial u_j} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1(\vec{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1(\vec{u})}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2(\vec{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_2(\vec{u})}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n(\vec{u})}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_n(\vec{u})}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

  - Schritt 3: Verändere das Integral wie folgt:

$$\int d^n x \, f(x_1, \dots, x_n) = \int d^n u \, \left|\mathrm{Det}\left\{\mathcal{J}_{\vec{x}}(\vec{u})\right\}\right| \, f(x_1(\vec{u}), \dots, x_n(\vec{u}))$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Jacobi-Matrix für die folgende Transformation?

$$y_1 = x_1 - x_2 \qquad\qquad y_2 = x_1 + x_2$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Jacobi-Matrix für eine Orthogonale Transformation?

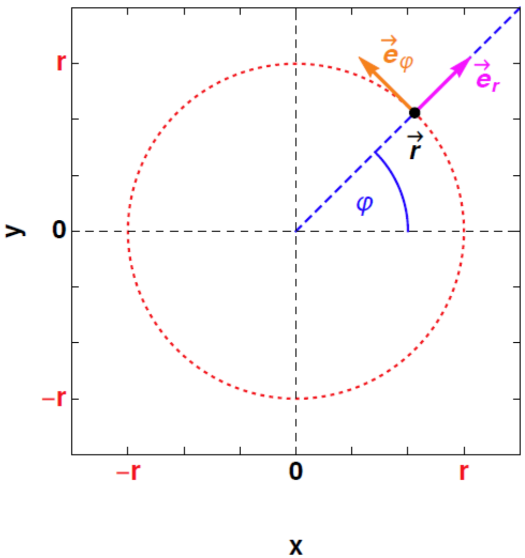
$$y = Ox$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

kartesische Koordinaten in 2D zu Polarkoordinaten



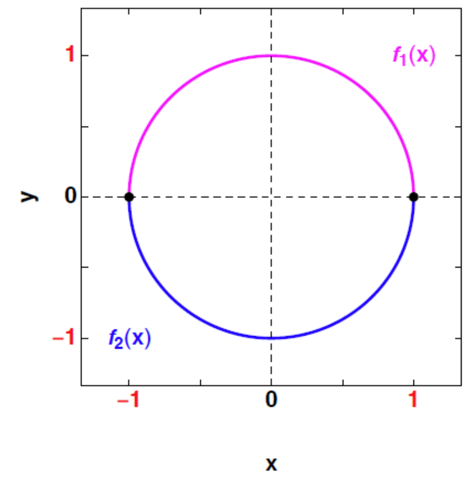
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi) \\ r\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$dx\,dy \rightarrow r\,dr\,d\varphi$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

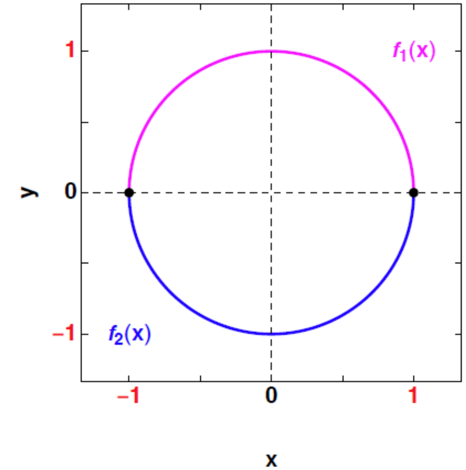
Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$

$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ?$$



§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;= ?$$

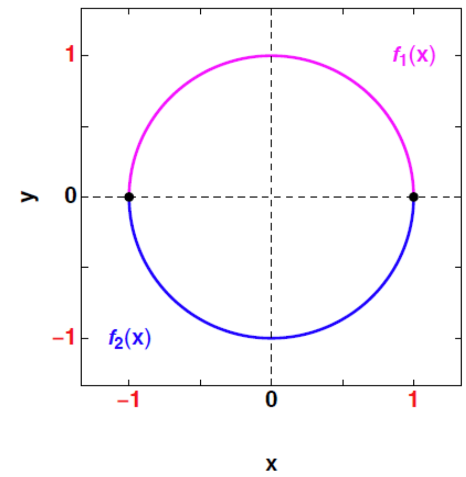
Kartesische Koordinaten:

$$\int dA = \int_{-1}^{1} dx \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} dy = \int_{-1}^{1} dx \, (f_1(x) - f_2(x)) = \int_{-1}^{1} dx \, \left(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2})\right)$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \, 2\sqrt{1-x^2} = 2\int_{0}^{1} dx \, 2\sqrt{1-x^2} = 4\int_{0}^{1} dx \, \sqrt{1-x^2} = 4\,\frac{\pi}{4} = \pi = \pi \, 1^2$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Einheitskreis, definiert über $x^2 + y^2 = 1$



$$\iint_{\text{Einheitskreis}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \; = ?$$

Polarkoordinaten?

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Gaußsches Integral: $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = ?$$

$$\Rightarrow \quad I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, e^{-(x^2+y^2)} = ?$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Gaußsches Integral mit mehreren Variablen:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n \, e^{-x^T A x}$$

A: $n \times n$ reelle symmetrische matrix

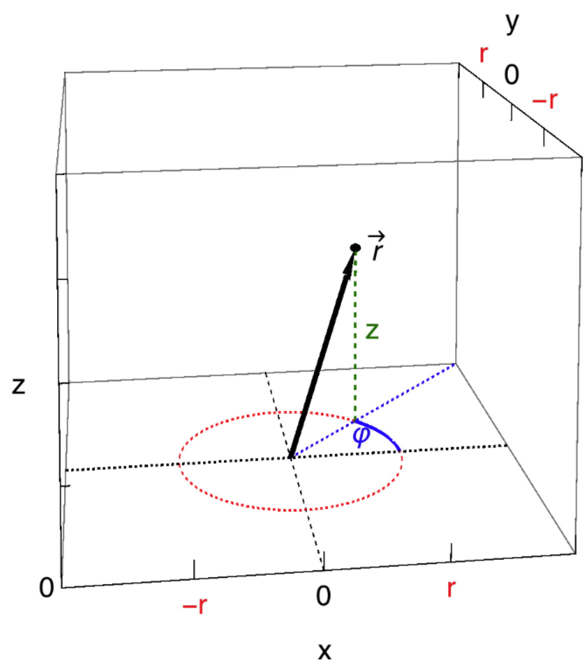
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Beispiel: $$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_2 \, e^{-(2x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2)} = ?$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

kartesische Koordinaten in 3D zu Zylinderkoordinaten

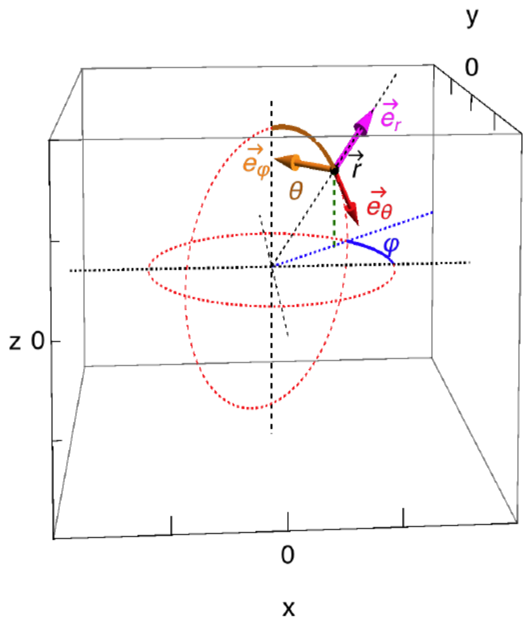


$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho\,\cos(\varphi) \\ \rho\,\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

$$dx\,dy\,dz \rightarrow \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

kartesische Koordinaten in 3D zu Kugelkoordinaten



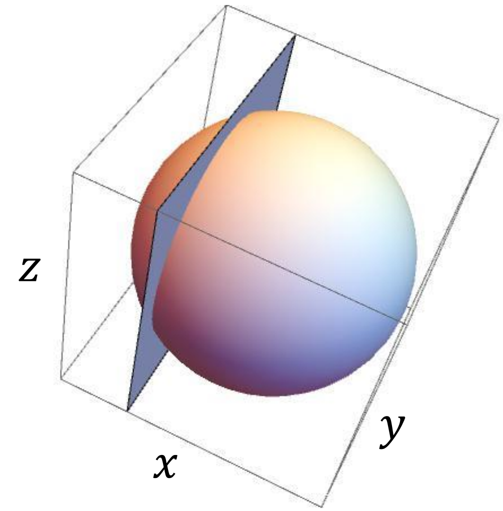
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} r\ \cos(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \sin(\varphi)\ \sin(\theta) \\ r\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$dx\, dy\, dz \rightarrow r^2\ \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Einheitskugel, definiert über $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$V = \iiint_{\mathrm{Einheitskugel}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$$

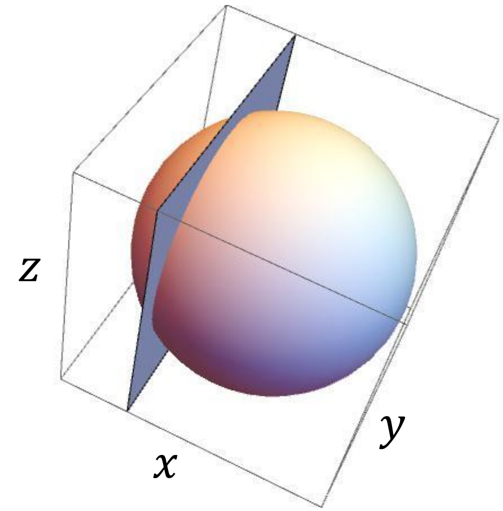


Kugelkoordinaten?

§ 5.4 Koordinatenwechsel bei Integralen

Einheitskugel, definiert über $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\iiint_{\text{Einheitskugel}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = ?$$



§ 6.1 Differential-Operatoren

- Nabla-Operator ∇: Vektor der ersten Ableitungen

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Gradient = Vektor der ersten Ableitungen der skalaren Funktion

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

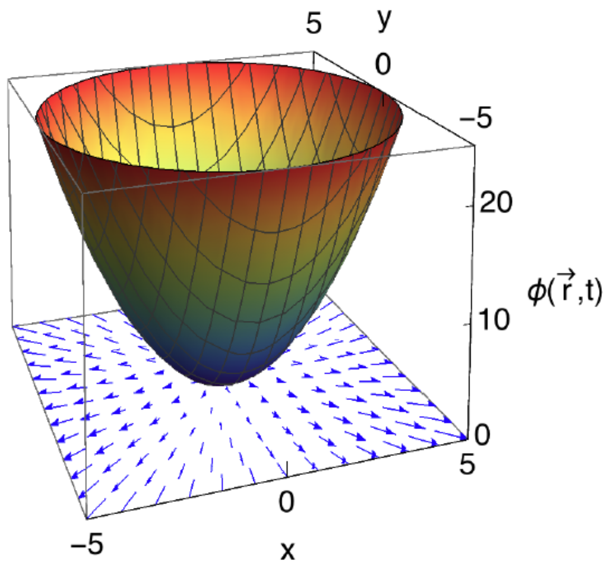
Gradient in der Physik: meistens nur Ortsableitungen!

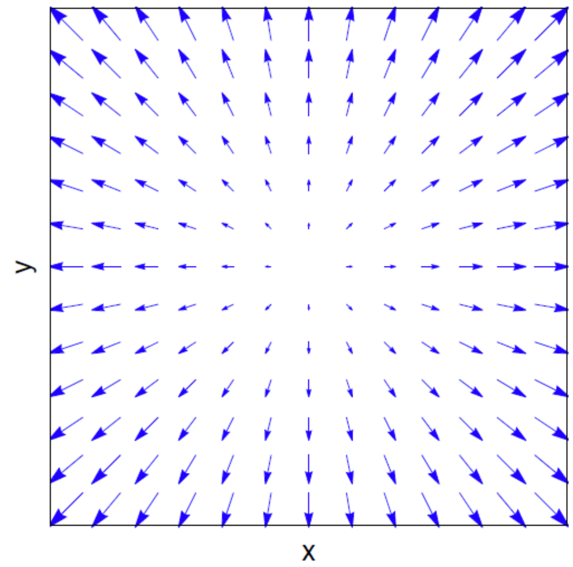
Ortsvektor im d-dimensionen Raum: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_d \end{pmatrix}$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \\ \frac{\partial}{\partial r_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial r_d} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{grad}\, \phi(\vec{r}, t) = \nabla\, \phi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial r_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \phi(\vec{r},t)}{\partial r_d} \end{pmatrix}$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

Beispiel:





$$\phi(\vec{r},t) = x^2 + y^2$$

$$\nabla\phi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 2\,x \\ 2\,y \end{pmatrix}$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

Divergenz = Skalarprodukt von ∇ mit der Vektorfunktion

$$\nabla \cdot \vec{f} = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}$$

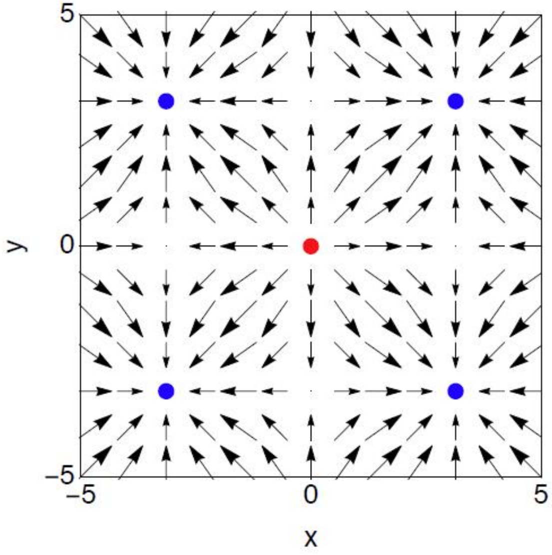
Divergenz in der Physik: meistens wieder nur Ortsableitungen

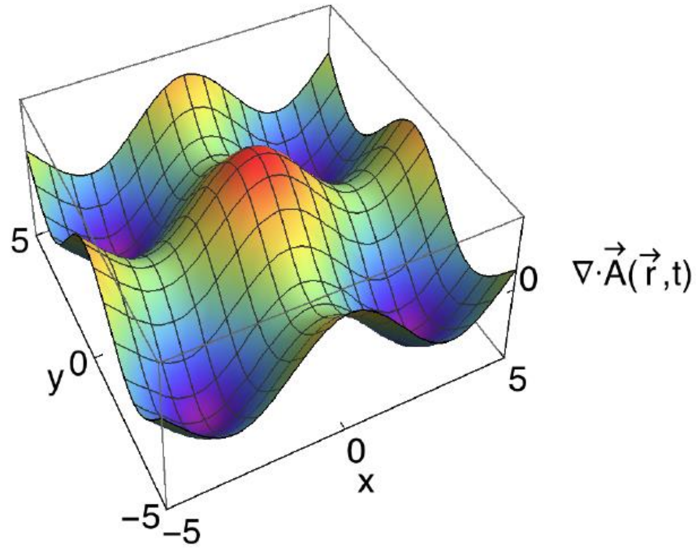
$$\vec{A} : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^d, \quad (\vec{r}, t) \mapsto \vec{A}(\vec{r}, t)$$

$$\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}_0, t) = \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}_0, t) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial A_i(\vec{r}_0, t)}{\partial r_i} = \frac{\partial A_1(\vec{r}_0, t)}{\partial r_1} + \frac{\partial A_2(\vec{r}_0, t)}{\partial r_2} + \ldots + \frac{\partial A_d(\vec{r}_0, t)}{\partial r_d}$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

Beispiel:





$$\vec{A}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \sin(x) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\partial \sin(x)}{\partial x} + \frac{\partial \sin(y)}{\partial y} = \cos(x) + \cos(y)$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

Rotation = Kreuzprodukt von ∇ mit der Vektorfunktion in 3D

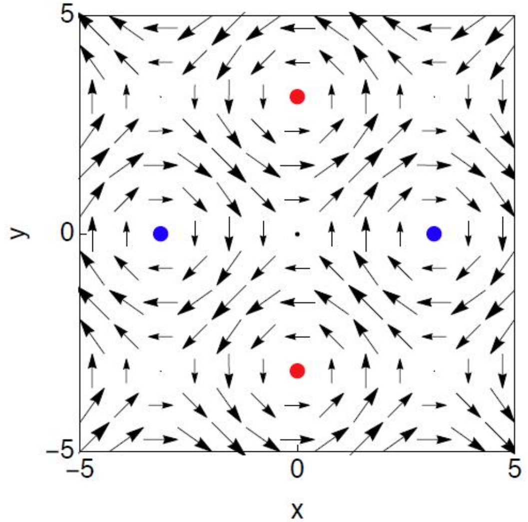
$$\nabla \times \vec{f} = \vec{\nabla} \times \vec{f}$$

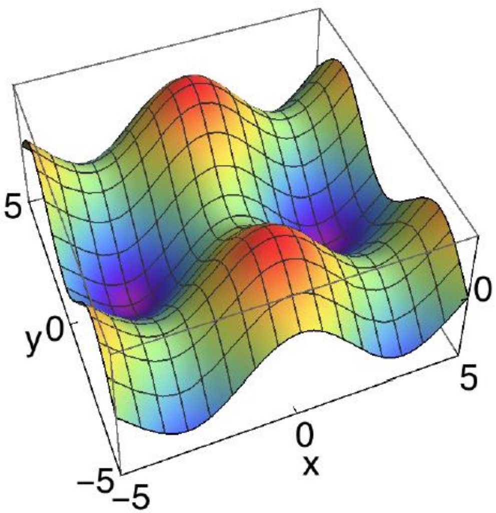
Rotation in der Physik: meistens wieder nur Ortsableitungen

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}_0, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z(\vec{r}_0,t)}{\partial y} - \frac{\partial A_y(\vec{r}_0,t)}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x(\vec{r}_0,t)}{\partial z} - \frac{\partial A_z(\vec{r}_0,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y(\vec{r}_0,t)}{\partial x} - \frac{\partial A_x(\vec{r}_0,t)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

Beispiel:





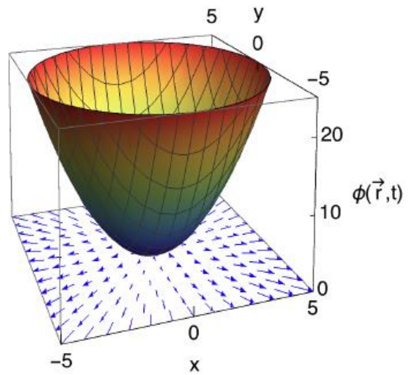
$\nabla \times \vec{A}(\vec{r},t)\Big|_z$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \sin(x) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \nabla \times \vec{A}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(x) - \cos(y) \end{pmatrix}$$

§ 6.1 Differential-Operatoren

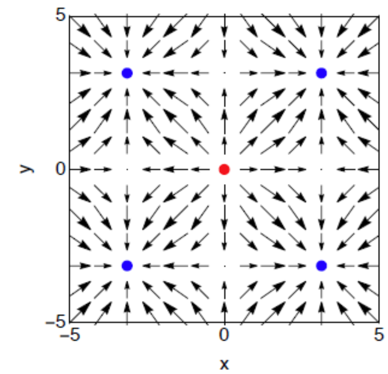
Gradient

$$\vec{a}\,\alpha = \vec{b} \quad \leftrightarrow \quad \nabla f = \vec{\nabla}\, f$$



Divergenz

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = c \quad \leftrightarrow \quad \nabla\cdot\vec{f} = \vec{\nabla}\cdot\vec{f}$$



Rotation

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c} \quad \leftrightarrow \quad \nabla\times\vec{f} = \vec{\nabla}\times\vec{f}$$