Musterlösung 1

1. **Dreiecksungleichung und Schwarzsche Ungleichung**

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen des Skalarprodukts

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \cos(\theta)$$

äquivalent sind, wobei θ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. *Hinweis*: Wählen Sie das Koordinatensystem geschickt!

(b) Beweisen Sie den aus der ebenen Trigonometrie bekannten Kosinussatz mit Hilfe des Skalarprodukts.

(c) Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

und die Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

gelten.

Lösung:

(a) Die einfachste Lösung findet man, wenn man zuerst Mal ein passendes Koordinatensystem wählt (wir dürfen ja Koordinatensysteme beliebig wählen!). Die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen eine Ebene im dreidimensionalen Raum auf. In dieser Ebene wählen wir nun ein orthonormales Koordinatensystem dessen erster Einheitsvektor $\vec{e}_1$ entlang $\vec{a}$ zeigt,

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

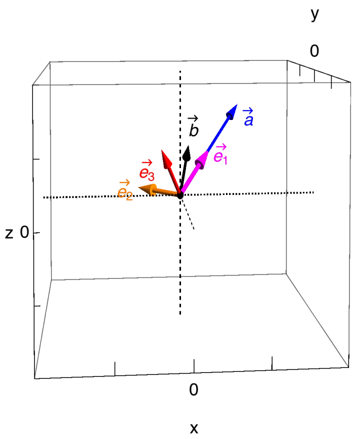
während $\vec{e}_2$, wie gesagt, in der selben Ebene liegt und senkrecht zu $\vec{e}_1$ ist. Mehr müssen wir tatsächlich erst mal nicht über $\vec{e}_2$ wissen. Der dritte Basisvektor $\vec{e}_3$ steht senkrecht zu $\vec{e}_1$ und senkrecht zu $\vec{e}_2$. Damit die Rechnung besonders "schön" wird, wählen wir ein sogenanntes "rechtshändiges" Koordinatensystem, in dem $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$ ist (das ist aber letztlich egal). Es gilt dann

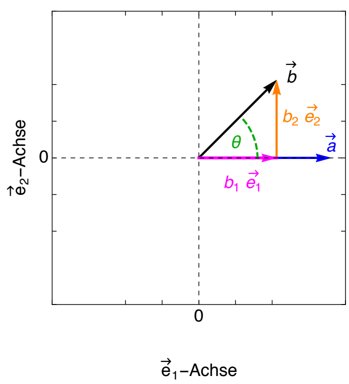
$$\vec{a} = a_x\, \vec{e}_x + a_y\, \vec{e}_y + a_z\, \vec{e}_z = |\vec{a}|\, \vec{e}_1 \quad \text{und} \quad \vec{b} = b_x\, \vec{e}_x + b_y\, \vec{e}_y + b_z\, \vec{e}_z = b_1\, \vec{e}_1 + b_2\, \vec{e}_2.$$

Das Skalarprodukt ist dann gegeben durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z = (|\vec{a}|\, \vec{e}_1) \cdot (b_1\, \vec{e}_1 + b_2\, \vec{e}_2) = |\vec{a}|\, \vec{e}_1 \cdot b_1\, \vec{e}_1 + |\vec{a}|\, \vec{e}_1 \cdot b_2\, \vec{e}_2 = |\vec{a}|\, b_1,$$

wobei wir $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$ und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$ genutzt haben (die Basisvektoren sind nach Annahme orthonormal).

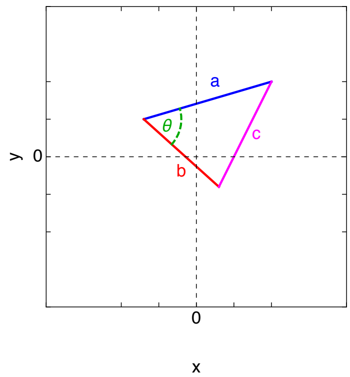




Die geometrische Definition des Kosinus besagt, dass $b_1/|\vec{b}| = \cos(\theta)$ ist. Dies impliziert

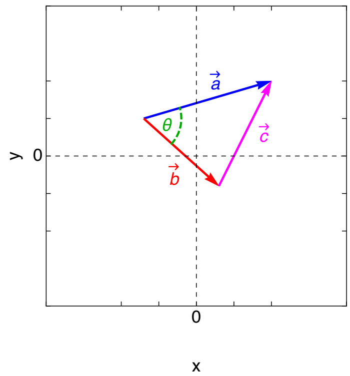
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,b_1 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\theta).$$

(b) Der Kosinussatz setzt die Seitenlängen eines Dreiecks mit den eingeschlossenen Winkeln in Beziehung. Für die folgende Abbildung gilt zum Beispiel



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\theta),$$

wobei θ den Winkel zwischen den Seiten a und b des Dreiecks bezeichnet. Um dies zu beweisen, führen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wie folgt ein:



Es gilt dann, dass $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ und $c = |\vec{c}|$. Außerdem gilt $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a}$. Somit finden wir, dass

$$c^2 = |\vec{c}|^2 = \vec{c}^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = (-\vec{b}+\vec{a})\cdot(-\vec{b}+\vec{a}) = \vec{b}\cdot\vec{b} - 2\,\vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{b}^2 - 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\theta) + \vec{a}^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos(\theta).$$

(c) Für die Dreiecksungleichung betrachten wir

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\theta),$$

wobei θ der Winkel zwischen$\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Da $-1 \le \cos(\theta) \le 1$, gilt

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\theta) \le |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}| = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2.$$

Wir ziehen hiervon die Wurzel, und finden

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Die zweite Gleichung ist noch einfacher zu zeigen:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left|\left(|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos(\theta)\right)\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos(\theta)|.$$

Da $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ gilt

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\cos(\theta)| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}|.$$

2. **Rechnen mit Vektoren**

Eine Ebene E enthält die drei Punkte $\vec{r}_1 = (0,2,1)^T$, $\vec{r}_2 = (-1,0,3)^T$ und $\vec{r}_3 = (1,0,1)^T$.

(a) Konstruieren Sie aus $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sowie aus $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_3$ zwei *normierte* Vektoren, $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$, die beide in der Ebene E liegen.

(b) Bestimmen Sie einen (normierten) Vektor $\vec{n}$ orthogonal zur Ebene E. *Hinweis:* Kreuzprodukt!

(c) Bestimmen Sie, ausgehend von $\vec{b}$, einen *normierten* Vektor $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{n}$ und $\vec{a}$.

Lösung:

(a) Vektoren in der Ebene: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (1,2,-2)^T$, $\vec{r}_1 - \vec{r}_3 = (-1,2,0)^T$.
Normiert: $\vec{a} = \boxed{\frac{1}{3}(1,2,-2)^T}$, $\vec{b} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0)^T}$.

(b) Vektor orthogonal zur Ebene: $\vec{a}\times\vec{b} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,4)^T$.
Der normierte Vektor: $\vec{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \boxed{\frac{1}{3}(2,1,2)^T}$.

(c) $\vec{b}$ ist bereits orthogonal zu $\vec{n}$, muss also nur noch bezüglich $\vec{a}$ orthonormiert werden.
Zerlegung: $\vec{b}_\parallel = (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{a} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(1,2,-2)^T$ und $\vec{b}_\perp = \vec{b} - \vec{b}_\parallel = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-4,4,2)^T$.
Normiert: $\vec{c} = \frac{\vec{b}_\perp}{|\vec{b}_\perp|} = \boxed{\frac{1}{3}(-2,2,1)^T}$.

3. **Lineare Unabhängigkeit**

Sind die drei Vektoren $\vec{v}_1 = (0,1,2)^T$, $\vec{v}_2 = (1,-1,1)^T$ und $\vec{v}_3 = (2,-1,4)^T$ linear unabhängig? Warum?

Lösung:
Die drei Vektoren sind linear unabhänig wenn, und nur wenn, die einzige Lösung der Gleichung

$$\vec{0} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = \alpha_1\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

die triviale ist, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Die Vektorgleichung (1) liefert ein System von drei Gleichungen, (i)-(iii), je eine für jede der drei Komponenten von (1), das wir wie folgt lösen:

(i)	$0\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$	$\overset{\text{(i)}}{\Rightarrow}$	(iv)	$\alpha_2 = -2\alpha_3$
(ii)	$1\alpha_1 - 1\alpha_2 - 1\alpha_3 = 0$	$\overset{\text{(iv) in (ii)}}{\Rightarrow}$	(v)	$\alpha_1 = -\alpha_3$
(iii)	$2\alpha_1 + 1\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$	$\overset{\text{(iv,v) in (iii)}}{\Rightarrow}$	(vi)	$0 = 0$

(i) liefert (iv): $\alpha_2 = -2\alpha_3$. (iv) in (ii) eingesetzt liefert (v): $\alpha_1 = -\alpha_3$. (iv) und (v) in (iii) eingesetzt liefern keine neue Information. Somit existieren unendlich viele nicht-triviale Lösungen (eine für jeden Wert von $\alpha_3 \in \mathbb{R}$), also sind $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ *nicht* linear unabhängig.

4. **Orthonormalbasis**

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{e}_1 = \frac{1}{5}(3,4)^T$ und $\vec{e}_2 = \frac{1}{5}(4,-3)^T$ eine Orthonormalbasis in zwei Dimensionen bilden.

Lösung:
Wir überprüfen, ob $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ ist falls $i \neq j$, wohingegen $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{5}3\,\frac{1}{5}3 + \frac{1}{5}4\,\frac{1}{5}4 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1 \\
\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}4\,\frac{1}{5}4 + \frac{1}{5}(-3)\,\frac{1}{5}(-3) = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1 \\
\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \frac{1}{5}3\,\frac{1}{5}4 + \frac{1}{5}4\,\frac{1}{5}(-3) = \frac{12}{25} - \frac{12}{25} = 0
\end{aligned}$$

Die beiden Vektoren sind normiert und orthogonal zueinander, bilden also eine Orthonormalbasis in zwei Dimensionen.