Musterlösung 10

1. **Gradient, Divergenz, Rotation und Nabla-Identitäten**

(a) Gegeben seien das Skalarfeld $f(x,y,z) = y^{-1}\cos(z)$ und die Vektorfelder $\vec{A}(x,y,z) = \left(-y, x, z^2\right)^T$ und $\vec{B}(x,y,z) = (x,0,1)^T$. Berechnen Sie ∇f, $\nabla\cdot\vec{A}$, $\nabla\times\vec{A}$, $\nabla\cdot\vec{B}$, $\nabla\times\vec{B}$.

(b) Beweisen Sie folgende Identitäten für ein *allgemeines* Skalarfeld $f(x,y,z)$ und *allgemeine* Vektorfelder $\vec{A}(x,y,z)$ und $\vec{B}(x,y,z)$ (mittels Indexnotation, d.h. ohne $\vec{A}$, $\vec{B}$ und ∇ als Spaltenvektoren darzustellen):

(i) $\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$

(ii) $\nabla\times(f\vec{A}) = f(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\times(\nabla f)$

(iii) $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})$

(iv) $\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \quad \text{wobei} \quad \nabla^2 = (\nabla\cdot\nabla)$

Anmerkung: Für jede Identität wird vorausgesetzt, dass die Felder hinreichend oft differenzierbar sind.

Lösung:

(a)
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 0 \\ -y^{-2}\cos(z) \\ -y^{-1}\sin(z)\end{pmatrix}, \quad \nabla\cdot\vec{A} = 2z\,, \quad \nabla\times\vec{A} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \quad \nabla\cdot\vec{B} = 1\,, \quad \nabla\times\vec{B} = \vec{0}\,,$$

(b) Die Gleichungen (i) ist eine skalare Gleichung. Im Gegensatz dazu sind (ii) bis (iv) Vektorgleichungen, die wir daher für eine gegebene Komponente, z.B. i, betrachten.

(i)
$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \partial_i(\vec{A}\times\vec{B})_i = \partial_i(\epsilon_{ijk}A_jB_k) = \epsilon_{ijk}B_k\partial_iA_j + \epsilon_{ijk}A_j\partial_iB_k$$
$$= B_k\epsilon_{kij}\partial_iA_j - A_j\epsilon_{jik}\partial_iB_k = B_k(\nabla\times\vec{A})_k - A_j(\nabla\times\vec{B})_j = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B})$$

(ii)
$$\left[\nabla\times(f\vec{A})\right]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(fA_k) = f\epsilon_{ijk}\partial_jA_k + A_k\epsilon_{ijk}\partial_jf = f(\nabla\times\vec{A})_i - \epsilon_{ikj}A_k(\nabla f)_j$$
$$= \left[f(\nabla\times\vec{A}) - (\vec{A}\times(\nabla f))\right]_i$$

(iii)
$$\left[\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B})\right]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{A}\times\vec{B})_k = \epsilon_{ijk}\partial_j(\epsilon_{klm}A_lB_m) = \underbrace{\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}}_{=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}}(B_m\partial_jA_l + A_l\partial_jB_m)$$
$$= B_j\partial_jA_i - B_i\partial_jA_j + A_i\partial_jB_j - A_j\partial_jB_i = \left[(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A}) + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}\right]_i$$

(iv)
$$\left[\nabla\times(\nabla\times\vec{A})\right]_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\nabla\times\vec{A})_k = \underbrace{\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}}_{=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}}\partial_j\partial_lA_m = \underbrace{\partial_j\partial_i}_{=\partial_i\partial_j}A_j - \partial_j\partial_jA_i$$
$$= \partial_i(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2A_i = \left[\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}\right]_i$$

2. **Gradient für** $f(r)$

(a) Für $\vec{r}\in\mathbb{R}^3$ und $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\vec{r}|$, berechnen Sie ∇r und ∇r^2.

(b) $f(r)$ sei eine allgemeine, zweimal differenzierbare Funktion von r. Berechnen Sie $\nabla f(r)$, ausgedrückt durch $f'(r)$, die erste Ableitung von f nach r.

Lösung:

(a) Kartesische Koordinaten:

$$\nabla r = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \overset{\text{(Kettenregel)}}{=} \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}}{r} = \boxed{\vec{e}_r}$$

$$\nabla r^2 = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (x^2+y^2+z^2) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \boxed{2\vec{r}}$$

Kugelkoordinaten:

$$\nabla r = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) r = \boxed{\vec{e}_r}$$

$$\nabla r^2 = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) r^2 = 2r\vec{e}_r = \boxed{2\vec{r}}$$

(b) Kartesische Koordinaten:

$$\nabla f(r) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} f \overset{\text{(Kettenregel)}}{=} [\partial_r f(r)] \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} r \overset{\text{(a)}}{=} \boxed{f'(r)\vec{e}_r}$$

Kugelkoordinaten:

$$\nabla f(r) = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \right) f(r) = \boxed{f'(r)\vec{e}_r}$$

3. **Geschwindigkeit und Beschleunigung**

Gegeben sei die Bahnkurve $\gamma = \{\vec{r}(t)\,|\, t \in [-\infty, \infty]\}$, $\vec{r}(t) = (e^{-t^2}, ae^{t^2})^T \in \mathbb{R}^2$, mit $0 < a \in \mathbb{R}$ ($0 < a < 1$ für (c)).

(a) Berechnen Sie dazu den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}(t)$. Lässt sich $\vec{r}(t)$ durch $\dot{\vec{r}}(t)$ und $\ddot{\vec{r}}(t)$ ausdrücken?

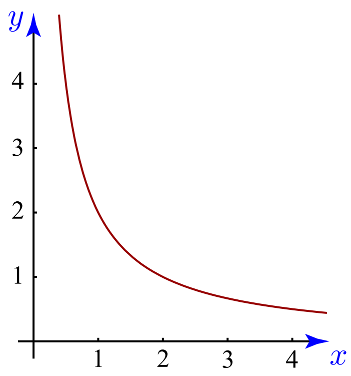
(b) Können Sie die Kurve ohne den Parameter t durch eine Gleichung darstellen? Um welche Kurve handelt es sich? Skizzieren Sie die Bahnkurve für den Fall $a = 2$.

(c) Berechnen Sie $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t)$. Finden Sie die Zeit $t(a)$, bei der $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 0$ gilt.

Lösung:

(a)
$$\vec{r}(t) = (e^{-t^2}, ae^{t^2})^T, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = \boxed{2t(-e^{-t^2}, ae^{t^2})^T}$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \boxed{2(-e^{-t^2}, ae^{t^2})^T + 4t^2(e^{-t^2}, ae^{t^2})^T}$$
$$= (1/t)\dot{\vec{r}}(t) + 4t^2\vec{r}(t)$$
$$\vec{r}(t) = \boxed{\tfrac{1}{4t^2}\left[\ddot{\vec{r}}(t) - \tfrac{1}{t}\dot{\vec{r}}(t)\right]}$$



(b) Parameterfreie Darstellung: $y = a/x$. Dies beschreibt eine Hyperbel. Die Abbildung zeigt den Fall $a = 2$.

(c) $\vec{r}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = \boxed{2t(-e^{-2t^2} + a^2e^{2t^2})}$; verschwindet für $a^2 = e^{-4t^2}$, also $t^2 = -\frac{1}{4}\ln a^2 \Rightarrow \boxed{t = \pm(\ln a^{-1/2})^{1/2}}$.