Musterlösung 11

1. **Durch Kurven begrenzte Fläche**

Gegeben seien die Kurve $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, b(1 - \frac{t}{a}))^T$ sowie die geschlossene Kurve $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (a\cos t, b\sin t)^T$ in kartesischen Koordinaten, mit $0 < a, b \in \mathbb{R}$.

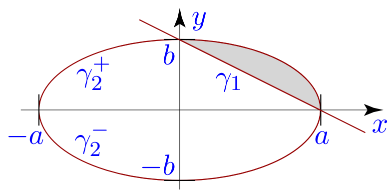
(a) Skizzieren Sie die Kurven γ_1 und γ_2.

(b) Berechnen Sie die von γ_2 umschlossene Fläche $S(a, b)$. [Kontrollergebnis: $S(1, 1) = \pi$.]

(c) Die Kurve γ_1 teilt die von γ_2 umschlossene Fläche in zwei Teile. Bestimmen Sie die Fläche $A(a, b)$ des kleineren Teilstücks mittels Berechnung eines Flächenintegrals. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einer geometrischen Überlegung.

Lösung:

(a) Entlang der Kurve γ_1 erfüllen die Komponenten $x = t$ und $y = b(1 - t/a)$ die Gleichung einer Geraden, nämlich $y = b(1 - x/a)$. Entlang der Kurve γ_2 erfüllen die Komponenten $x = a\cos t$ und $y = b\sin t$ die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen a und b, nämlich $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.



(b) Zur Berechnung von Flächen ist es nützlich, die Kurven durch eine Koordinate im $\mathbb{R}^2$ zu parametrisieren. Dazu nehmen wir hier x als Kurvenparameter (y wäre ebenso möglich) und parametrisieren die oberen und unteren Äste der Ellipse, $\gamma_2^\pm$, durch $y_2^\pm(x) = \pm b\sqrt{1 - x^2/a^2}$, mit $|x| < a$. Ihre Fläche ist dann durch $-a \le x \le a$ und $y_2^-(x) \le y \le y_2^+(x)$ beschrieben:

$$S(a, b) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{y_2^-(x)}^{y_2^+(x)} \mathrm{d}y = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \left[y_2^+(x) - y_2^-(x)\right] = 2\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, b\sqrt{1 - x^2/a^2}$$

$$\overset{x\,=\,a\sin u}{=} 2ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}u\, \cos^2 u \overset{\text{partielle Integration}}{=} 2ab\tfrac{1}{2}\Big[u + \sin u \cos u\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \boxed{\pi ab}.$$

(c) Wir parametrisieren die Gerade γ_1 durch $y_1(x) = b(1 - x/a)$. Laut Skizze liegen ihre Schnittpunkte mit der Ellipse γ_2 bei $(a, 0)^T$ und $(0, b)^T$. Das ist konsistent mit folgendem algebraischem Argument: Da $y_1(x) \ge 0$ für $x \le a$, schneidet γ_1 nur den positiven Ast γ_2^+ der Ellipse, und zwar wenn

$$0 = y_1(x) - y_2^+(x) = b(1 - x/a) - b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}}\,, \quad \Rightarrow \quad x = a \;\text{ oder }\; x = 0\,.$$

Die gesuchte Fläche (in der Figur schattiert) wird somit durch $0 \le x \le a$ und $y_1(x) \le y \le y_2^+(x)$ beschrieben:

$$A(a, b) = \int_0^a \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2^+(x)} \mathrm{d}y\, 1 = \int_0^a \mathrm{d}x \left[y_2^+(x) - y_1(x)\right] = \int_0^a \mathrm{d}x\, b\left[\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}} - (1 - \tfrac{x}{a})\right]$$

$$\overset{\text{(a)}}{=} \tfrac{1}{4}\pi ab - b\left[x - \tfrac{1}{2}\tfrac{x^2}{a}\right]_0^a = \boxed{ab(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2})}.$$

Geometrische Überlegung: Die gesuchte Fläche entspricht einem Viertel der Fläche der Ellipse, nämlich $\frac{1}{4}\pi ab$, minus der Fläche eines Dreiecks mit Basis a und Höhe b, nämlich $\frac{1}{2}ab$.

2. **Linienintegral eines Vektorfeldes**

Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma] = \int_\gamma d\vec{r} \cdot \vec{F}$ des Vektorfelds $\vec{F}(\vec{r}) = (xe^{yz}, ye^{xz}, ze^{xy})^T$ entlang der *geraden* Strecke γ vom Punkt $\vec{0} = (0,0,0)^T$ zum Punkt $\vec{b} = a(1,2,1)^T$, mit $a \in \mathbb{R}$. [Kontrollergebnis: für $a^2 = \ln 2$ ist $W[\gamma] = 7/2$.]

Lösung:
Gegebenes Vektorfeld: $\vec{F}(\vec{r}) = (xe^{yz}, ye^{xz}, ze^{xy})^T$. Die Parametrisierung der geraden Strecke γ von $\vec{0} = (0,0,0)^T$ nach $\vec{b} = a(1,2,1)^T$ ist $\vec{r}(t) = t\vec{b}$, mit $t \in [0,1]$.

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T = t\vec{b} = ta(1,2,1)^T, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = a(1,2,1)^T,$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \Big(x(t)e^{y(t)z(t)}, y(t)e^{x(t)z(t)}, z(t)e^{x(t)y(t)}\Big)^T = \Big(tae^{2a^2t^2}, 2tae^{a^2t^2}, tae^{2a^2t^2}\Big)^T$$

$$\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t)) = \Big(ta^2e^{2a^2t^2} + 4ta^2\cdot e^{a^2t^2} + ta^2\cdot e^{2a^2t^2}\Big) = a^2\Big(2te^{2a^2t^2} + 4te^{a^2t^2}\Big)$$

$$W[\gamma] = \int_\gamma d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_0^1 dt\, \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{F}(\vec{r}(t)) = \int_0^1 dt\, a^2\Big[2te^{2a^2t^2} + 4te^{a^2t^2}\Big]$$

$$= \left[2a^2\frac{1}{4a^2}e^{2a^2t^2} + 4a^2\frac{1}{2a^2}e^{a^2t^2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}e^{2a^2} - \tfrac{1}{2} + 2e^{a^2} - 2 = \boxed{\tfrac{1}{2}e^{2a^2} + 2e^{a^2} - \tfrac{5}{2}}$$

$$W[\gamma]_{a^2=\ln 2} = \tfrac{1}{2}e^{2\ln 2} + 2e^{\ln 2} - \tfrac{5}{2} = \tfrac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - \tfrac{5}{2} = \tfrac{7}{2} \checkmark$$

3. **Linienintegral**

Das Magnetfeld eines unendlich langen stromdurchflossenen Leiters hat die Form

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{c}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\nabla \times \vec{B} = 0$ gilt, falls $\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_K] = \int_{\gamma_K} d\vec{r}\cdot\vec{B}$ für den geschlossenen Weg entlang dem Kreis mit Radius R um den Ursprung, $\gamma_K = \{\vec{r}(t) = R(\cos t, \sin t, 0)^T | t \in [0, 2\pi]\}$.

(c) Berechnen Sie das Linienintegral $W[\gamma_R] = \int_{\gamma_R} d\vec{r}\cdot\vec{B}$ für den geschlossenen Weg γ_R entlang den Kanten des Rechtecks mit Eckpunkten $(1,0,0)^T$, $(2,0,0)^T$, $(2,3,0)^T$ und $(1,3,0)^T$. [*Hinweis:* $\int dx\, \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x) + C$]

Lösung:

(a) Alle Komponenten der Rotation des gegebenen Feldes, $\vec{B} = \frac{c}{x^2+y^2}(-y, x, 0)^T$, verschwinden abseits der z-Achse ($\sqrt{x^2+y^2} \neq 0$):

$$\partial_z B_x - \partial_x B_z = 0\,, \quad \partial_z B_y - \partial_y B_z = \boxed{0}.$$

$$\partial_x B_y - \partial_y B_x = c\left[\frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} - (-)\frac{(x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] = \boxed{0}.$$

(b) Entlang des Kreises γ_K mit Radius R um den Ursprung, mit $t \in [0, 2\pi]$, gilt:

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T = R(\cos(t), \sin(t), 0)^T, \qquad \dot{\vec{r}}(t) = R(-\sin(t), \cos(t), 0)^T$$

$$\vec{B}(\vec{r}(t)) = \frac{c}{x(t)^2 + y(t)^2}\,(-y(t), x(t), 0)^T = \frac{cR}{R^2}\,(-\sin(t), \cos(t), 0)^T$$

$$\dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{B}(\vec{r}(t)) = c\left[\sin^2(t) + \cos^2(t)\right] = c$$

$$W[\gamma_K] = \int_{\gamma_K} d\vec{r}\cdot\vec{B} = \int_0^{2\pi} dt\, \dot{\vec{r}}(t)\cdot\vec{B}(\vec{r}(t)) = \int_0^{2\pi} dt\, c = \boxed{2\pi c}.$$

(c) Das Linienintegral hat vier Beiträge, entsprechend den vier Kanten des Rechtecks:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}W[\gamma_R] &= \int_1^2 \mathrm{d}x \frac{0}{x^2+0^2} + \int_0^3 \mathrm{d}y \frac{2}{2^2+y^2} + \int_2^1 \mathrm{d}x \frac{-3}{x^2+3^2} + \int_3^0 \mathrm{d}y \frac{1}{1^2+y^2} \\
&\overset{\tilde{y}=\frac{y}{2},\,\tilde{x}=\frac{x}{3}}{=} 0 + \int_0^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}\tilde{y} \frac{1}{1+\tilde{y}^2} + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \mathrm{d}\tilde{x} \frac{1}{\tilde{x}^2+1^2} - \int_0^3 \mathrm{d}y \frac{1}{1^2+y^2} \\
&= [\arctan(\tfrac{3}{2}) - \arctan(0)] + [\arctan(\tfrac{2}{3}) - \arctan(\tfrac{1}{3})] - [\arctan(3) - \arctan(0)] \\
&= \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{2} = \boxed{0},
\end{aligned}
$$

denn $\arctan(\frac{A}{B}) + \arctan(\frac{B}{A}) = \frac{\pi}{2}$ gilt für beliebige positive Zahlen A und B.