Musterlösung 12

1. Satz von Gauß

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} z \\ x^2 + z^2 \\ x\,z \end{pmatrix},$$

und überprüfen Sie den (Integral-) Satz von Gauß,

$$\int_V \mathrm{d}V\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int \mathrm{d}S\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}). \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie hierzu zuerst das Volumenintegral auf der linken Seite von Gleichung (1), wobei Sie als Integrationsvolumen einen um den Ursprung zentrierten Würfel mit Seitenlänge 2 wählen (der also die Punkte $\vec{r}$ mit $-1 \leq x, y, z \leq 1$ umfasst).

(b) Berechnen Sie die rechte Seite von Gleichung (1), indem Sie alle sechs Oberflächenintegrale ausführen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teil (a).

Lösung:

(a) Das Volumenintegral ist

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}V\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ x^2 + z^2 \\ x\,z \end{pmatrix} \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \left(\frac{\partial\, z}{\partial x} + \frac{\partial\, (x^2 + z^2)}{\partial y} + \frac{\partial\, (x\,z)}{\partial z} \right) \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, (0 + 0 + x) \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, x.
\end{aligned}$$

Dieses Integral ist ungerade in x und muss daher per Symmetrie verschwinden. Dies folgt formal aus

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{d}V\, \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, x \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{-1}^{1} \cdot [y]_{-1}^{1} \cdot [z]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1^2 - (-1)^2\right) \cdot (1 - (-1)) \cdot (1 - (-1)) = \frac{1}{2} \cdot (1 - 1) \cdot (1 + 1) \cdot (1 + 1) = 0.
\end{aligned}$$

(b) Der Würfel hat sechs Oberflächen. Wir betrachten erst die Oberfläche bei $x = -1$. Der Normalenvektor hier ist

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben also

$$\int_{S_1} \mathrm{d}S\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\Big|_{x=-1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\x^2+z^2\\x\,z\end{pmatrix}\Bigg|_{x=-1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\,(-1)\cdot z$$
$$= -\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\,z = -\left[y\right]_{-1}^{1}\cdot\left[\frac{1}{2}\,z^2\right]_{-1}^{1} = -(1-(-1))\cdot(1^2-(-1)^2) = 0.$$

Danach betrachten wir die Oberfläche bei $x=+1$, für die gilt

$$\vec{n}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

und somit analog

$$\int_{S_2} \mathrm{d}S\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\Big|_{x=1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\x^2+z^2\\x\,z\end{pmatrix}\Bigg|_{x=1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\,1\cdot z = 0.$$

Als nächstes betrachten wir die "oberen" und "unteren" Flächen (die bei festem $z=\pm 1$). Für die Fläche bei $z=-1$ finden wir

$$\vec{n}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},$$

und

$$\int_{S_3} \mathrm{d}S\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\Big|_{z=-1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\x^2+z^2\\x\,z\end{pmatrix}\Bigg|_{z=-1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\,(-1)\cdot x\,(-1)$$
$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\,x = \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_{-1}^{1}\cdot\left[x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)\cdot(1-(-1)) = 0\cdot 2 = 0.$$

Die obere Fläche hat den Normalenvektor

$$\vec{n}_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

und

$$\int_{S_4} \mathrm{d}S\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\Big|_{z=1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\x^2+z^2\\x\,z\end{pmatrix}\Bigg|_{z=1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\,(+1)\cdot x\,(+1)$$
$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\,x = \left[\frac{1}{2}\,x^2\right]_{-1}^{1}\cdot\left[x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right)\cdot(1-(-1)) = 0\cdot 2 = 0.$$

Jetzt verbleiben noch die Oberflächen bei $y=\pm 1$. Bei $y=-1$ ist der Normalenvektor

$$\vec{n}_5 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix},$$

und

$$\int_{S_5} \mathrm{d}S\,\vec{n}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\Big|_{y=-1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\x^2+z^2\\x\,z\end{pmatrix}\Bigg|_{y=-1} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\,(-1)\cdot\left(x^2+z^2\right)$$
$$= (-1)\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\,x^2 + (-1)\cdot\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\,z^2$$
$$= (-1)\,\left[\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{1}\,\left[z\right]_{-1}^{1} + (-1)\,\left[x\right]_{-1}^{1}\,\left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3}\cdot 2 - 2\cdot\frac{2}{3} = -\frac{8}{3}.$$

Die letzte Fläche liegt bei $y = +1$. Für diese erhalten wir

$$\vec{n}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und

$$\begin{aligned} \int_{S_6} \mathrm{d}S\, \vec{n}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})\Big|_{y=1} &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ x^2 + z^2 \\ x\, z \end{pmatrix}\Bigg|_{y=-1} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, (+1) \cdot \left(x^2 + z^2\right) \\ &= (+1) \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, x^2 + (+1) \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, z^2 \\ &= \left[\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{1} [z]_{-1}^{1} + [x]_{-1}^{1} \left[\frac{1}{3}z^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

In Summe erhalten wir also für das komplette Oberflächenintegral

$$0 + 0 + 0 + 0 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0\,.$$

Wir finden also, dass der Satz von Gauß funktioniert. Und wir sehen, dass es viel einfacher ist, statt des Oberflächenintegrals über alle Oberflächen des Würfels zu berechnen das Integral mit dem Satz von Gauß in ein Volumenintegral zu überführen, und dann dieses auszurechnen. Dies ist die praktische Nützlichkeit des Satzes von Gauß!

2. **Aharonov-Bohm Effekt**

Der Aharonov-Bohm Effekt ist ein quantenmechanischer Interferenzeffekt. Der Welle-Teilchen-Dualismus erlaubt es, ein Elektron als eine Welle zu verstehen. Wenn Elektronenwellen aufeinandertreffen, kommt es im Allgemeinen zu Interferenz. Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz von einem Magnetfeld beeinflusst das von der Elektronenwelle räumlich getrennt ist.

Das Magnetfeld $\vec{B}$ wird in der Elektrodynamik als Rotation eines "Eichfelds" (oder "Vektorpotentials") $\vec{A}(\vec{r})$ beschrieben,

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}).$$

Betrachten Sie im Folgenden das statische Eichfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r})$ an Orten $\vec{r}$ außerhalb der z-Achse (also $x \neq 0$ oder $y \neq 0$ oder $x, y \neq 0$).

(b) Beim Aharonov-Bohm Effekt wird die Elektroneninterferenz einer elektronischen Welle, die sich entlang eines geschlossenen Weges $\mathcal{C}$ bewegt (also z.B. im Kreis) durch den "magnetischen Fluss" Φ bestimmt, der durch die Elektronenbahn eingeschlossen wird. Dieser ist das Integral des magnetischen Feldes über die vom Weg eingeschlossene Fläche. Betrachten Sie nun eine Elektronenwelle, die sich entlang eines Kreisringes mit Radius 1 um die z-Achse in der (xy)-Ebene bewegt (also bei $z = 0$). Berechnen Sie den magnetischen Fluss

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

durch eine Kreisscheibe mit Radius 1 um die z-Achse in der (xy)-Ebene, also bei $z = 0$, mit Hilfe des Satzes von Stokes. Stehen dieses Ergebnis im Widerspruch zu Aufgabenteil (a)? *Hinweis:* Nutzen Sie wieder das am besten passenden Koordinatensystem für die Berechnung des Integrals. Wählen Sie den Normalenvektor der Fläche als in positive z-Richtung zeigend.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \partial_y A_z(\vec{r}) - \partial_z A_y(\vec{r}) \\ \partial_z A_x(\vec{r}) - \partial_x A_z(\vec{r}) \\ \partial_x A_y(\vec{r}) - \partial_y A_x(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \partial_x A_y(\vec{r}) - \partial_y A_x(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x A_y(\vec{r}) - \partial_y A_x(\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten

$$\partial_x A_y(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x^2+y^2}\, x = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, 2x\, x + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

und

$$\partial_y A_x(\vec{r}) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x^2+y^2}\,(-y) = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\, 2y\,(-y) + \frac{1}{x^2+y^2}\,(-1) = -\frac{1}{x^2+y^2} + 2\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

und damit

$$\begin{aligned} B_z(\vec{r}) = \partial_x A_y(\vec{r}) - \partial_y A_x(\vec{r}) &= \frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ &= 2\frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{1}{x^2+y^2} - 2\frac{1}{x^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\vec{B}(\vec{r}) = 0$$

wenn wir das Magnetfeld von der z-Achse entfernt berechnen. Auf der z-Achse selbst ist der Wert des Feldes formal $\infty - \infty$, was nicht wohldefiniert ist.

(b) Mit dem Satz von Stokes erhalten wir

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot [\nabla \times \vec{A}(\vec{r})] = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$

Wir wählen den Oberflächennormalenvektor als in positive z-Richtung zeigend. Der Rand der Fläche kann dann als (wenn man von oben schaut) entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis parametrisiert werden, wobei die genaue Parametrisierung von der Wahl des Startpunkts $\vec{r}(t=0)$ abhängt (diese Wahl ist jedoch ohne Einfluß auf das Endergebnis). Eine mögliche Wahl ist

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Wir erhalten damit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t \in [0, 2\pi[,$$

und

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{A}(\vec{r})\,.$$

Auf diesem Pfad ist das Vektorpotential durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das bedeutet, dass

$$\begin{aligned} \Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \int_{\partial S} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\, [\cos^2(t) + \sin^2(t)] = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi. \end{aligned}$$

Es scheint jetzt, als hätten wir vielleicht ein Problem. Der Satz von Stokes besagt, dass

$$\Phi = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 2\pi.$$

Wenn wir aber $\vec{B}(\vec{r}) = 0$ in das Integral einsetzen, scheinen wir $\Phi = 0$ zu erhalten. Allerdings müssen wir beachten, dass $\vec{B}(\vec{r}) = 0$ nur für Punkte $\vec{r}$ gilt, die nicht auf der z-Achse liegen – auf der z-Achse war das Ergebnis nicht wohldefiniert! Unser Ergebnis impliziert, dass das Magnetfeld durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = 2\pi\, \delta(x)\, \delta(y)\, \vec{e}_z,$$

gegeben sein muss: diese Form von $\vec{B}$ ist in der Tat Null außerhalb der z-Achse, aber hat ein endliches Integral!

3. **Trennung der Variablen**

Eine autonome Differentialgleichung erster Ordnung heißt 'autonom', wenn sie die Form $\dot{x} = f(x)$ hat, also die rechte Seite zeitunabhängig ist [nicht-autonom wäre $\dot{x} = f(x,t)$]. Solche Gleichungen können mit Trennung der Variablen gelöst werden.

(a) Lösen Sie die autonome Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ für zwei verschiedene Randbedingungen: (i) $x(0) = 1$ und (ii) $x(2) = -1$. [Kontrollergebnis: (i) $x(-2) = \frac{1}{3}$, und (ii) $x(2) = -1$.]

(b) Skizzieren Sie die gefundene Lösung qualitativ. Überzeugen Sie sich, dass Ihre Skizzen für die Funktion $x(t)$ und deren Ableitung $\dot{x}(t)$ den durch die Differentialgleichung vorgegebenen Zusammenhang erfüllt.

Lösung:

(a) Die Autonome DGL $\dot{x} = x^2$ kann durch Trennung der Variablen und anschliessende Integration gelöst werden.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}\tilde{x}}{\tilde{x}^2} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}\tilde{t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x(t)} + \frac{1}{x(t_0)} = t - t_0\,.$$

Randbedingung (i) ist $x(0) = 1$: $\quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{x(t)} + 1 = t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \dfrac{1}{1-t}}$,

wobei die Lösung auf dem Intervall $(-\infty, 1)$ definiert ist.

Randbedingung (ii) ist $x(2) = -1$: $\quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{x(t)} - 1 = t - 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \dfrac{1}{1-t}}$,

wobei die Lösung auf dem Intervall $(1, \infty)$ definiert ist.

(b) Graphische Analyse der Gleichung $\dot{x} = x^2$:

Für alle $x \neq 0$ ist $x^2 > 0$ und somit $\dot{x} > 0$, also steigt die Kurve streng monoton. (ii) Für $x = 1$ gilt $\dot{x} = 1$, das legt die Steigung bei $x = 1$ fest. Für $x \to \pm\infty$ gilt $\dot{x} \to \infty$; das deutet darauf hin, dass es einen Wert für t gibt, wo die Kurve divergiert. Laut der expliziten Lösung der Differentialgleichung geschieht dies bei $t = 1$.