WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 16.01.2023
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Musterlösung 13

1. **Inhomogene lineare Differentialgleichung: Variation der Konstanten**

Lösen Sie die inhomogene Differentialgleichung $\dot{x} + 2x = t$ mit $x(0) = 0$, wie folgt:

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

(b) Finden Sie dann durch Variation der Konstanten die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. [Kontrollergebnis: $x(-\ln 2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.]

Lösung:

(a) Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\dot{x}_h(t)+2x_h(t) = 0$ ist: $\boxed{x_h(t) = x_h(0)\mathrm{e}^{-2t}}$. Dies finden wir durch Erkennen der Stammfunktion, Exponentialansatz, oder Trennung der Variablen.

(b) Variation der Konstanten: $x_p(t) = c(t)\mathrm{e}^{-2t}$.
In Differentialgleichung einsetzen wir mit $t_0 = 0,\ c(0) = 0$:

$$t = \dot{x}_p(t) + 2x_p(t) = [\dot{c}(t) - 2c(t) + 2c(t)]\,\mathrm{e}^{-2t} = \dot{c}(t)\mathrm{e}^{-2t} \quad \Rightarrow \quad \dot{c}(t) = t\mathrm{e}^{2t}\,.$$

$$\Rightarrow \qquad c(t) = \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}\ \tilde{t}\mathrm{e}^{2\tilde{t}} \overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2}\tilde{t}\mathrm{e}^{2\tilde{t}}\Big|_0^t - \int_0^t \mathrm{d}\tilde{t}\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\tilde{t}} = \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\tilde{t}}\Big|_0^t = \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\,.$$

$$\Rightarrow \qquad x_p(t) = c(t)\mathrm{e}^{-2t} = \boxed{\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}}\,.$$

Die Randbedingung ist $x(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_h(0) = 0$:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = x_h(0)\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t}}\,.$$

2. **Gekoppelte Differentialgleichungen**

Lösen Sie die gekoppelte Differentialgleichungen,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

mit Randbedingung $f(0) = 1$ und $g(0) = 3$.

Lösung:
Um die gekoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underbrace{\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}}_{=\vec{v}(x)} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=M}\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$$

zu lösen, verwenden wir die allgemeine Lösung

$$\vec{v}(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i\, e^{\lambda_i x}\, \vec{v}_i,$$

wobei c_i beliebige Konstanten sind und $\vec{v}_i$ den Eigenvektor von M zum Eigenwert λ_i bezeichnet. Die Eigenwerte der Matrix M sind

$$\left(\frac{3}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \ \text{ und } \ \lambda_2 = 2$$

und die entsprechenden Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für die allgemeine Lösung der gekoppelten Differentialgleichungen

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = c_1 e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

und daher

$$f(x) = \boxed{c_1 e^x + c_2 e^{2x}} \quad \text{und} \quad g(x) = \boxed{c_1 e^x - c_2 e^{2x}}.$$

Mit der Randbedingung $f(0) = c_1 + c_2 = 1$ und $g(0) = c_1 - c_2 = 3$ erhalten wir

$$c_1 = \boxed{2} \quad \text{und} \quad c_2 = \boxed{-1}.$$

3. **Komplexe Zahlen: Grundlagen**

(a) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = 7 + 3i, \quad z_2 = -1 + 2i, \quad z_3 = -4 + 9i, \quad z_4 = 5i.$$

(b) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_5 = 25e^{i\,0.2}, \quad z_6 = -9e^{i\pi/2}, \quad z_7 = -2e^{-i\pi}, \quad z_8 = e^{3+2i}.$$

(c) Zeigen Sie, dass für jede komplexe Zahl z

$$z \cdot z^* = |z|^2$$

gilt.

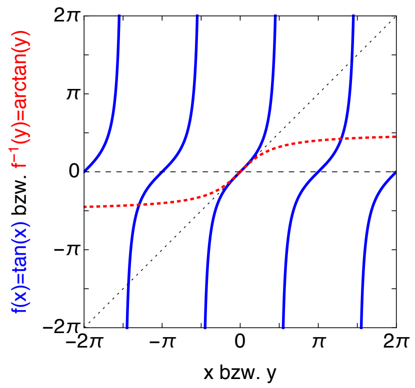
(d) Berechnen Sie alle 6 Werte von z, die die Gleichung

$$z^6 = 2$$

erfüllen.

Lösung:

(a) Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit Realteil x und Imaginärteil y hat den Betrag $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Das Argument φ ist durch $x = |z|\cos(\varphi)$ und $y = |z|\sin(\varphi)$ festgelegt, und kann also über den Arkustangens bestimmt werden, $\varphi \leftrightarrow \arctan(y/x)$. Dabei beachten wir, dass der Hauptzweig von $\arctan(\theta)$ für $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ definiert ist:



Für das Argument φ wählen wir die Konvention $\varphi \in (-\pi, \pi]$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$ ist aber auch richtig). Im ersten und vierten Quadranten der komplexen Ebene gilt $\varphi = \arctan(y/x)$, wohingegen eine komplexe Zahl im zweiten Quadranten der komplexen Ebene $\varphi = \arctan(y/x) + \pi$ erfüllt, und im dritten Quadranten $\varphi = \arctan(y/x) - \pi$ gilt. Wir finden also:

- $z_1 = 7 + 3i$: Betrag $|z_1| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} \approx 7.62$, Argument $\varphi = \arctan\left(\frac{3}{7}\right) \approx 1.40$.
- $z_2 = -1 + 2i$: Betrag $|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.24$, Argument $\varphi = \pi + \arctan\left(\frac{2}{-1}\right) = \pi - \arctan(2) \approx 2.03$ (beachten Sie, dass $-1 + 2i$ im zweiten Quadranten der komplexen Ebene liegt).
- $z_3 = -4 + 9i$: Betrag, $|z_3| = \sqrt{(-4)^2 + 9^2} = \sqrt{97} \approx 9.85$, Argument $\varphi = \pi + \arctan\left(\frac{9}{-4}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{9}{4}\right) \approx 1.99$.
- $z_4 = 5i$: Betrag $|z_4| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$, Argument $\varphi = \pi/2$. Hier ist der arctan nicht hilfreich, denn $\arctan(5/0) = \arctan(\infty)$ ist nicht definiert. Allerdings ist z_4 in der komplexen Ebene genau auf der positiven imaginären Achse, wo $\varphi = \pi/2$ ist.

(b) Wir nutzen $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z = x + iy$ mit $x = |z|\cos(\varphi)$ und $y = |z|\sin(\varphi)$. Somit erhalten wir

- $z_5 = 25e^{i\,0.2}$: $\mathrm{Re}(z_5) = 25\cos(0.2) \approx 24.50$ und $\mathrm{Im}(z_5) = 25\sin(0.2) \approx 4.97$.
- $z_6 = -9e^{i\pi/2}$: wir erinnern uns zuerst, dass $e^{i\pi} = -1$. Dies nutzen wir, um das Minuszeichen vor der Zahl als Phase zu schreiben. Wir erhalten also $z_6 = -9\,e^{i\pi/2} = e^{i\pi}\,9\,e^{i\pi/2} = 9\,e^{i\pi}\,e^{i\pi/2} = 9\,e^{i(\pi+\pi/2)} = 9\,e^{i(3\pi/2)}$, und somit $\mathrm{Re}(z_6) = 9\cos(3\pi/2) = 0$ und $\mathrm{Im}(z_6) = 9\sin(3\pi/2) = -9$. Alternativ kann man sich auch erinnern, dass $e^{i\pi/2} = i$ ist, was zum selben Ergebnis führt.
- $z_7 = -2e^{i\pi}$: wir nutzen $e^{-i\pi} = e^{i\pi} = -1$ und finden $z_7 = -2e^{i\pi} = 2$. Das bedeutet, dass $\mathrm{Re}(z_7) = 2$ und $\mathrm{Im}(z_7) = 0$.
- $z_8 = e^{3+2i}$: wir nutzen $z_8 = e^{3+2i} = e^3 \cdot e^{2i}$ und finden mit $e^{2i} = \cos(2) + i\sin(2)$, dass $\mathrm{Re}(z_8) = e^3\cos(2) \approx -8.36$ und $\mathrm{Im}(z_8) = e^3\sin(2) \approx 18.26$.

(c) Wir nutzen die Definition von komplexer Konjugation,

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad z^* = x - iy \quad (\text{mit } x = \mathrm{Re}(z) \text{ und } y = \mathrm{Im}(z)).$$

Mit $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ folgt

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= (x + iy) \cdot (x - iy) = x \cdot x + x \cdot (-iy) + (iy) \cdot x + (iy) \cdot (-iy) = x^2 - ixy + ixy - (i \cdot i)y^2 \\ &= x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2. \end{aligned}$$

(d) Die Eulersche Formel besagt, dass

$$|e^{i\theta}| = |\cos(\theta) + i\sin(\theta)| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = \sqrt{1} = 1 \quad \forall\theta.$$

Wir suchen nun nach den komplexen Zahlen

$$z_i = |z_i|\,e^{i\varphi_i},$$

die

$$z_i^6 = \left(|z_i|e^{i\varphi_i}\right)^6 = |z_i|^6 e^{i\,6\varphi_i} = 2$$

erfüllen. Da $|e^{i\,6\varphi}| = 1$, haben alle diese Zahlen z_i den selben Betrag

$$|(z_i)^6| = |z_i|^6 = |2| = 2 \quad \Rightarrow \quad |z_i| = 2^{1/6} = \sqrt[6]{2} \approx 1.12.$$

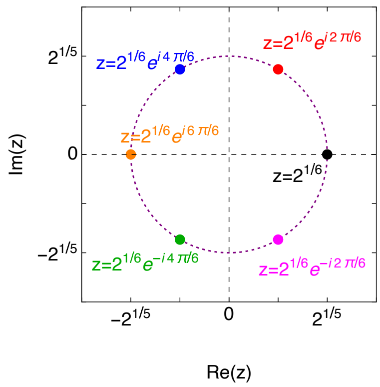
Für die Argumente φ_i nutzen wir, dass

$$2 = 2e^{i\,0} = 2e^{i\,2\pi} = 2e^{i\,4\pi} = 2e^{-i\,2\pi} = 2e^{-i\,4\pi}.$$

Die passenden Werte von φ sind also

$$
\begin{aligned}
6\varphi_1 &= 0 &\Rightarrow\quad \varphi_1 &= 0,\\
6\varphi_2 &= 2\pi &\Rightarrow\quad \varphi_2 &= 2\pi/6 \approx 1.05,\\
6\varphi_3 &= 4\pi &\Rightarrow\quad \varphi_3 &= 4\pi/6 \approx 2.09,\\
6\varphi_4 &= -2\pi &\Rightarrow\quad \varphi_4 &= -2\pi/6 \approx -1.05,\\
6\varphi_5 &= -4\pi &\Rightarrow\quad \varphi_5 &= -4\pi/6 \approx -2.09,\\
6\varphi_6 &= 6\pi &\Rightarrow\quad \varphi_6 &= 6\pi/6 = \pi \approx 3.14.
\end{aligned}
$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\varphi = \pi$ das selbe ist wie $\varphi = -\pi$, denn φ ist nur bis auf 2π genau definiert. Wir haben die Konvention $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gewählt, weshalb wir $\varphi = \pi$ zur Darstellung einer Komplexen Zahl auf der negativen reellen Achse nutzen. Graphisch sind die 6 Lösungen z_i auf einem Kreis mit Radius $2^{1/6} \approx 1.12$ in der komplexen Ebene, die gleichmäßig verteilt angeordnet sind:



Dies stimmt auch allgemeiner: die Gleichung

$$z^n = z_0$$

hat n Lösungen, die auf einem Kreis mit Radius $|z_0|^{1/n}$ in der komplexen Ebene mit gleichem Abstand zu den jeweiligen Nachbarn angeordnet sind.