Ausgabe: 23.01.2023

Musterlösung 14

1. **Diagonalisierung von komplexen 2×2 Matrizen**

Finden Sie für folgende komplexe Matrizen die Eigenwerte λ_j und normierten Eigenvektoren $\vec{v}_j$:

(a) $A = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 2 & i \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms liefern die Eigenwerte:

Char. Polynom: $0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -i-\lambda & 0 \\ 2 & i-\lambda \end{vmatrix} = (-i-\lambda)(i-\lambda)$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = +i, \quad \lambda_2 = -i}$.

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = +i: \quad \vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_1 \mathbb{1})\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_1 = a_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ |a_1| = 1}.$$

$$\lambda_2 = -i: \quad \vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_2 \mathbb{1})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2i \end{pmatrix} \vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \ |a_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Explizit: Für den Eigenvektor $\vec{v}_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})^T$ gilt $-2iv_{1,1} + 0v_{1,2} = 0$, also hat er die Form $\vec{v}_1 = a_1(0,1)^T$. Analog findet man $\vec{v}_2 = a_2(1,i)^T$. Die Vorfaktoren sind komplexe Zahlen und haben somit die allgemeine Form $a_j = |a_j|(\cos\phi_j + i\sin\phi_j)$, mit Betrag $|a_j|$ und Phase ϕ_j. Die Aufgabenstellung verlangt normierte Eigenvektoren. Die Normierungsbedingung legt den Betrag $|a_j|$ jedes Vorfaktors fest, aber nicht seine Phase, die also beliebig gewählt werden kann. Im Folgenden wählen wir $\phi_j = 0$, also $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(b) Wir finden die Eigenwerte über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

Char. Polynom: $0 \stackrel{!}{=} \det(B - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & i \\ -i & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2)$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2}$.

Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 0: \quad \vec{0} \stackrel{!}{=} (B - \lambda_1 \mathbb{1})\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \ |a_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$\lambda_2 = 2: \quad \vec{0} \stackrel{!}{=} (B - \lambda_2 \mathbb{1})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \ |a_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Explizit: Für den Eigenvektor $\vec{v}_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})^T$ gilt $v_{1,1} + iv_{1,2} = 0$, also hat er die Form $\vec{v}_1 = a_1(1,i)^T$. Analog findet man $\vec{v}_2 = a_2(1,-i)^T$. Der Betrag beider Vorfaktoren wird durch die Normierungsbedinung festgelegt, die Phasen der Vorfaktoren sind beliebig. Wir wählen sie gleich Null, nehmen also reelle Vorfaktoren: $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

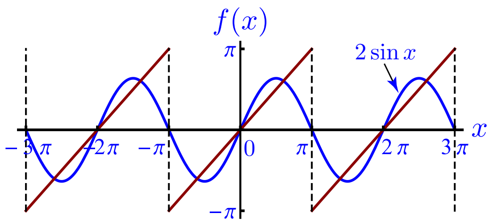
2. **Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion**

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, gegeben durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x+2\pi) = f(x)$. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten c_n in der Darstellung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$. Wie wählen wir L? Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$, sowie die Summe der $n = 1$ und $n = -1$ Terme der Fourier-Reihe (d.h. der erste Term der entsprechenden Sinus-Reihe).

Lösung: Sägezahnfunktion: $f(x) = x$ falls $-\pi < x < \pi$, periodisch fortgesetzt mit Periode $L = 2\pi$. Fourier-Ansatz: $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{L}nx}$, mit $L = 2\pi$ und $n \in \mathbb{Z}$.

$$n \neq 0: \quad c_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) e^{-inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, x e^{-inx} \overset{\text{part. int.}}{=} \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x}{in}e^{-inx}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, \frac{1}{in} e^{-inx}\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i}{n} x e^{-inx} + \frac{1}{n^2} e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\frac{i}{n}(-1)^n}.$$

$$n = 0: \qquad c_0 = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, x e^0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, x = \boxed{0}.$$



Die Fourier-Reihe hat die folgende Form:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \boxed{\sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n e^{inx}}.$$

Anmerkung: Da die Funktion ungerade ist, lässt sie sich auch als reine Sinus-Reihe schreiben:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n e^{inx} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n [\cos(nx) + i\sin(nx)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n [\cos(nx) + i\sin(nx)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{-n}(-1)^{-n} [\cos(-nx) + i\sin(-nx)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n [\cos(nx) + i\sin(nx)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n}(-1)^n [\cos(nx) - i\sin(nx)] \\
&= \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(-1)^{n-1} \sin(nx)}.
\end{aligned}$$

3. **Parseval Theorem**

$f(x)$ sei eine Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = x$ für $-\pi < x < \pi$, $f(\pm\pi) = 0$ und $f(x+2\pi) = f(x)$. In der Fourier-Darstellung $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ lauten die Fourier-Koeffizienten $c_n = i(-1)^n/n$ $(n \neq 0)$ (siehe Aufgabe 2). Beweisen Sie die berühmte Identität $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basler Problem), indem Sie das Integral $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2$ einerseits direkt berechnen und andererseits mittels der Parseval-Identität durch die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$ ausdrücken.

Lösung:

$$\text{Parseval Theorem}: \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Einerseits: $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\,|f(x)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\,x^2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{3}}. \tag{1}$$

Andererseits: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \sum_{\substack{n=-\infty \\ (n\neq 0)}}^{\infty} \left|\frac{i}{n}\,(-1)^n\right|^2 = \boxed{2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}. \tag{2}$$

Parseval: (1) = (2) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$