Musterlösung 2

1. Rechnen mit Vektoren

(a) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = (1, 0, 2)^T$ in einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ und einen Vektor $\vec{a}_\perp$ senkrecht zum Vektor $\vec{b} = (2, 1, 0)^T$.

(b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(c) Berechnen Sie das Spatproduct $V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Lösung:

(a) Der Einheitsvektor entlang der $\vec{b}$-Richtung ist $\vec{e}_b = \vec{b}/|\vec{b}| = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)^T$. Daher haben wir

$$\vec{a}_\parallel = (\vec{a} \cdot \vec{e}_b)\vec{e}_b = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix}},$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

(b)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

(c) Das Spatprodukt is zyklisch, daher gilt

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|^2 = (-2)^2 + 4^2 + 1^2 = \boxed{21}.$$

Alternativ kann man die Berechnung wie folgt durchführen:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-2 \\ 8-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 20 = 21\,.$$

2. Matrixmultiplikation

Berechnen Sie alle möglichen Produkte von Paaren der folgenden Matrizen (inklusive deren Quadrate, wo möglich):

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Ein Matrixprodukt AB ist nur dann definiert, wenn A so viele Spalten hat wie B Zeilen. Die möglichen Produkte von zwei der Matrizen P, Q und R sind somit:

$$PQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 27 & 2 \\ 8 & 10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} .$$

$$PR = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -14 & 26 \\ -50 & -15 & 14 \\ -22 & -43 & 66 \\ 28 & 14 & -8 \end{pmatrix} .$$

$$RQ = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ -24 & 0 \\ 28 & 2 \end{pmatrix} .$$

$$RR = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -26 & 52 \\ 56 & 28 & -24 \\ -64 & -36 & 36 \end{pmatrix} .$$

3. **Spur**

Berechnen Sie für die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Spur $\mathrm{Sp}(X\,Z)$. Erklären den Zahlenwert des Ergebnisses in Anbetracht der allgemeinen Rechenregeln für die Spur und indem Sie $X\,Z$ und $Z\,X$ explizit berechnen und vergleichen.

Lösung:
Wir finden

$$X\,Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z\,X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die Spur ist daher

$$\mathrm{Sp}(X\,Z) = 0 + 0 = 0.$$

Die muss auf Grund des zyklischen Charakters der Spur auch so sein. Oben haben wir gezeigt, dass $X\,Z = -Z\,X$ ist. Es gilt also

$$\mathrm{Sp}(X\,Z) \overset{\text{zyklisch}}{=} \mathrm{Sp}(Z\,X) \quad \text{und} \quad \mathrm{Sp}(X\,Z) \overset{X\,Z=-Z\,X}{=} \mathrm{Sp}(-Z\,X) = -\mathrm{Sp}(Z\,X).$$

Im letzten Schritt haben wir den Skalar (-1) aus der Spur gezogen. Insgesamt finden wir also, dass $\mathrm{Sp}(X\,Z) = \mathrm{Sp}(Z\,X) = -\mathrm{Sp}(Z\,X)$. Die kann nur dann gelten, wenn $\mathrm{Sp}(X\,Z) = \mathrm{Sp}(Z\,X) = 0$ ist, wie wir es oben auch explizit berechnet haben.

4. **Determinante**

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung:
Für die Determinante einer (3×3)-Matrix gilt die einfache Regel

$$\mathrm{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi\,.$$

Die Determinante von A ist somit

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \cdot 0 \\
&= 0 + 0 + 0 - 8 - 3 - 0 \\
&= -11\,.
\end{aligned}$$

Die Determinante einer (4×4)-Matrix kann mit dem Entwicklungssatz berechnet werden. Die zweite Spalte von B enthält zwei Nullen. Daher ist es einfacher, nach der zweiten Spalte von B zu entwickeln:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(B) = \operatorname{Det}&\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^{1+2} \cdot (-2) \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -4 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad + (-1)^{3+2} \cdot 2 \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{4+2} \cdot 0 \cdot \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot [4 \cdot 5 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \cdot 6 - 1 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 6 - (-4) \cdot (-4) \cdot 1] + 0 \\
&\quad + (-2) \cdot [5 \cdot (-4) \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 6 - 3 \cdot (-4) \cdot 2 - 5 \cdot 1 \cdot 6 - 4 \cdot 4 \cdot 1] + 0 \\
&= 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 38 \\
&= -72\,.
\end{aligned}$$