Musterlösung 3

1. Gauß-Verfahren

Lösen Sie folgendes lineares Gleichungsystem mit dem Gauß-Verfahren.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1\,, \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 4x_3 & = & -2\,, \\ -x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & - & x_3 & = & 0\,. \end{array}$$

Lösung:

Wir stellen die erweiterte Matrix des Gleichungsystems auf, und bringen ihre linke Seite in Diagonalform. Dazu ersetzen wir sukzessive jede Zeile durch eine geeignete Linearkombinationen der Zeilen [mit eckigen Klammern angedeutet] der vorigen erweiterten Matrix, z.B. im ersten Schritt $[1] \to [1]$, $[2] \to \frac{1}{2}(3[2]-2[1])$ und $[3] \to 6[3] + 2[1]$. Dabei empfiehlt sich zur Vereinfachung des Kopfrechnens, das Auftreten von Brüchen möglichst so lange zu vermeiden, bis die linke Seite in 'Zeilen-Stufen-Form' (nur Nullen auf einer Seite der Diagonale) gebracht worden ist.

$$\begin{array}{rrrrcr} & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ [1]: & 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ [2]: & 2 & -2 & 4 & | & -2 \\ [3]: & -1 & \frac{1}{2} & -1 & | & 0 \end{array} \quad\longrightarrow\quad \begin{array}{rrrrcr} & x_1 & x_2 & x_3 & & \\ [1]: & 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ \frac{1}{2}(3[2]-2[1]): & 0 & -5 & 7 & | & -4 \\ 6[3]+2[1]: & 0 & 7 & -8 & | & 2 \end{array}$$

$$\swarrow$$

$$\begin{array}{rrrrcr} \frac{1}{3}(5[1]+2[2]): & 5 & 0 & 3 & | & -1 \\ -[2]: & 0 & 5 & -7 & | & 4 \\ \frac{1}{9}(7[2]+5[3]): & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{array} \quad\longrightarrow\quad \begin{array}{rrrrcr} \frac{1}{5}([1]-3[3]): & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ \frac{1}{5}([2]+7[3]): & 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ [3]: & 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{array}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet somit: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (1, -2, -2)^T$.

2. Gauß-Jordan-Verfahren

(a) Bestimmen Sie das Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

mittels Gauß-Jordan-Verfahren.

(b) Überprüfen Sie anschließend durch Matrixmultiplikation, dass tatsächlich $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_{3\times 3}$ gilt.

Lösung:

(a) Gauß-Jordan-Verfahren (angewendete Linearkombinationen der Zeilen der vorigen erweiterten Matrix mit eckigen Klammern angedeutet):

$$
\begin{array}{rrrrcrrr}
[1]: & -1 & 5 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\
[2]: & 1 & 2 & -2 & | & 0 & 1 & 0 \\
[3]: & 3 & 3 & 2 & | & 0 & 0 & 1
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrcrrr}
-[1]: & 1 & -5 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\
[1]+[2]: & 0 & 7 & -2 & | & 1 & 1 & 0 \\
3[1]+[3]: & 0 & 18 & 2 & | & 3 & 0 & 1
\end{array}
$$

$$\swarrow$$

$$
\begin{array}{rrrrcrrr}
[1]: & 1 & -5 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\
\frac{1}{7}[2]: & 0 & 1 & -\frac{2}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\
-\frac{18}{7}[2]+[3]: & 0 & 0 & \frac{50}{7} & | & \frac{3}{7} & -\frac{18}{7} & 1
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrcrrr}
[1]: & 1 & -5 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\
[2]: & 0 & 11 & -\frac{2}{7} & | & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\
\frac{7}{50}[3]: & 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{50} & -\frac{18}{50} & \frac{7}{50}
\end{array}
$$

$$\swarrow$$

$$
\begin{array}{rrrrcrrr}
[1]: & 1 & -5 & 0 & | & -1 & 0 & 0 \\
[2]+\frac{2}{7}[3]: & 0 & 1 & 0 & | & \frac{8}{50} & \frac{2}{50} & \frac{2}{50} \\
[3]: & 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{50} & -\frac{18}{50} & \frac{7}{50}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{rrrrcrrr}
[1]+5[2]: & 1 & 0 & 0 & | & -\frac{10}{50} & \frac{10}{50} & \frac{10}{50} \\
[2]: & 0 & 1 & 0 & | & \frac{8}{50} & \frac{2}{50} & \frac{2}{50} \\
[3]: & 0 & 0 & 1 & | & \frac{3}{50} & -\frac{18}{50} & \frac{7}{50}
\end{array}
$$

Daraus folgt das Ergebnis:

$$A^{-1} = -\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -8 & -2 & -2 \\ -3 & 18 & -7 \end{pmatrix}$$

(b) Wir überprüfen nun:

$$AA^{-1} = -\frac{1}{50}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -8 & -2 & -2 \\ -3 & 18 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = -\frac{1}{50}\begin{pmatrix} 10 & -10 & -10 \\ -8 & -2 & -2 \\ -3 & 18 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Der Levi-Civita-Tensor**

Beweisen Sie mit Hilfe des Levi-Civita-Tensors die Zyklizität des Spatprodukts

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

die BAC-CAB-Regel

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}),$$

die Jacobi-Identität

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$$

und die Lagrange-Identität

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})\,(\vec{b}\cdot\vec{c}),$$

wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ Vektoren in drei Dimensionen sind.

Lösung:
Wir betrachten einen allgemeinen Ansatz für die Vektoren in drei Dimensionen:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

wobei $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ eine ähnliche Form annehmen. Für die Beweise verwenden wir ausgiebig

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i, \quad (\vec{a}\times\vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k\,.$$

Die Einsteinsche Summenkonvention wird hier benutzt.

Für das Spatprodukt gilt

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = a_i(\vec{b}\times\vec{c})_i = a_i(\epsilon_{ijk}b_jc_k) = \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k = \epsilon_{kij}c_ka_ib_j = c_k(\epsilon_{kij}a_ib_j) = c_k(\vec{a}\times\vec{b})_k = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})\,.$$

Eine Komponente des doppelten Kreuzprodukts ist

$$\begin{aligned}[\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})]_i &= \epsilon_{ijk}a_j(\vec{b}\times\vec{c})_k = \epsilon_{ijk}a_j(\epsilon_{klm}b_lc_m)\\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}a_jb_lc_m = (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})a_jb_lc_m\\ &= a_mb_ic_m - a_jb_jc_i = b_i(\vec{a}\cdot\vec{c}) - c_i(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

und somit gilt die BAC-CAB-Regel

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\,.$$

Mit der BAC-CAB-Regel erhält man die Jacobi-Identität

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}\,)+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}\,)+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}\,) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}\,)-\vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b}\,)+\vec{c}\,(\vec{b}\cdot\vec{a}\,)-\vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c}\,)+\vec{a}\,(\vec{c}\cdot\vec{b}\,)-\vec{b}\,(\vec{c}\cdot\vec{a}\,)=0\,.$$

Der Beweis der Lagrange-Identität lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\times\vec{b})_i(\vec{c}\times\vec{d})_i = (\epsilon_{ijk}a_jb_k)(\epsilon_{ilm}c_ld_m)\\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}a_jb_kc_ld_m = (\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl})a_jb_kc_ld_m\\ &= a_jb_kc_jd_k - a_jb_kc_kd_j = (a_jc_j)(b_kd_k) - (b_kc_k)(a_jd_j)\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})\,.\end{aligned}$$

Alternativ können Sie die Zyklizität des Spatprodukts und die BAC-CAB-Regel kombinieren, um die Lagrange-Identität zu beweisen

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{c}\times\vec{d})\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})] = \vec{a}\cdot[\vec{c}(\vec{b}\cdot\vec{d}) - \vec{d}(\vec{b}\cdot\vec{c})] = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})\,.$$