Musterlösung 4

1. **Drehmatrizen in zwei Dimensionen**

In zwei Dimensionen wird die Drehung um den Winkel θ durch die Drehmatrix

$$D_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Geben Sie die Matrix D_{θ_i} für die Winkel $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/4$, $\theta_3 = \pi/2$ und $\theta_4 = \pi$ an. Berechnen Sie die Wirkung der D_{θ_i} $(i = 1,2,3,4)$ auf $\vec{v}_1 = (1,0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0,1)^T$.

(b) Die Verknüpfung zweier Drehungen ist wieder eine Drehung. Zeigen Sie, dass $D_\theta D_\phi = D_{\theta+\phi}$.

(c) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $\vec{v} = (a,b)^T$ die Drehung um einen Winkel θ die Länge nicht ändert, d.h., dass $\vec{w} = D_\theta \vec{v}$ den gleichen Betrag hat wie $\vec{v}$.

Lösung:

(a) Die Drehmatrizen sind gegeben durch

$$D_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ihre Wirkungen auf die beiden Vektoren sind daher

$$D_0\vec{v}_1 = \vec{v}_1, \quad D_{\frac{\pi}{4}}\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\frac{\pi}{2}}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_\pi\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$D_0\vec{v}_2 = \vec{v}_2, \quad D_{\frac{\pi}{4}}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_{\frac{\pi}{2}}\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_\pi\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Beweis folgt einer einfachen Matrixmultiplikation

$$\begin{aligned} D_\theta D_\phi &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi & -\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta\sin\phi + \cos\theta\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\phi) & -\sin(\theta+\phi) \\ \sin(\theta+\phi) & \cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} = D_{\theta+\phi}\,. \end{aligned}$$

(c) Der gedrehte Vektor $\vec{w}$ ist

$$\vec{w} = D_\theta\vec{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Der Betrag von $\vec{w}$ ist daher

$$|\vec{w}| = \sqrt{(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta + b\cos\theta)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{a^2+b^2} = |\vec{v}|\,.$$

2. **Diagonalisierung einer symmetrischen 3×3 Matrix**

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_j und die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\vec{v}_j$ folgender Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms liefern die Eigenwerte:

Char. Polynom: $$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -4-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(-4-\lambda) + 4\lambda + \lambda$$
$$= -\lambda(\lambda^2 + 4\lambda - 5) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 5)$$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -5}$.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 0:$ $$\vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_1\mathbb{1})\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \ |a_1| = \tfrac{1}{\sqrt{5}}}.$$

$\lambda_2 = 1:$ $$\vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_2\mathbb{1})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{v}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = a_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ |a_2| = \tfrac{1}{\sqrt{6}}}.$$

$\lambda_3 = -5:$ $$\vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_3\mathbb{1})\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\vec{v}_3 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{v}_3 = a_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \ |a_3| = \tfrac{1}{\sqrt{30}}}.$$

Die Normierungsbedingung $|\vec{v}_j| = 1$ legt den Betrag $|a_j|$ jedes Vorfaktors fest, aber nicht seine Phase, die also beliebig gewählt werden kann. Im Folgenden wählen wir die Vorfaktoren reell und positiv, also $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $a_3 = \frac{1}{\sqrt{30}}$.

3. **Diagonalisierung einer 2×2 Matrix**

Finden Sie für folgende reelle Matrix die Eigenwerte λ_j, Eigenvektoren $\vec{v}_j$ und die Transformationsmatrix S (Ähnlichkeitstransformation) sowie deren Inverse, S^{-1}, für die $S^{-1}AS$ diagonal ist:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, dass $S^{-1}AS$ auf der Diagonalen die Eigenwerte enthält.

Lösung:
Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms liefern die Eigenwerte:

Char. Polynom: $$0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(6-\lambda) + 12$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Eigenwerte: $\boxed{\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3}$.

Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 2:$ $$\vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_1\mathbb{1})\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\vec{v}_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

$\lambda_2 = 3:$ $$\vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_2\mathbb{1})\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\vec{v}_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}.$$

Explizit: Die beiden Reihen der Matrix $(A - \lambda_j \mathbb{1})$ sind proportional zueinander (wie erwartet, da die Determinante dieser Matrix gleich Null ist). Beide Reihen liefern somit dieselbe Information über den jeweiligen Eigenvektor $\vec{v}_j$. Für $\vec{v}_1 = (v_{1,1}, v_{1,2})^T$ gilt $-3v_{1,1}+6v_{1,2} = 0$, also hat er die Form $\vec{v}_1 = a_1(2,1)^T$. Analog findet man $\vec{v}_2 = a_2(3,2)^T$. Die Vorfaktoren a_1 und a_2 werden *nicht* durch die Eigenwertgleichung festgelegt, denn wenn $\vec{v}_j$ die Gleichung $(A - \lambda_j \mathbb{1})\vec{v}_j = 0$ erfüllt, gilt dasselbe für $a_j\vec{v}_j$, mit $a_j \in \mathbb{R}$. Falls Normierung der Eigenvektoren gewünscht ist, legt die Normierungsbedingung $|\vec{v}_j| = 1$ den Betrag der Vorfaktoren, $|a_j|$, fest. Das ist hier jedoch nicht der Fall, also wählen wir den Vorfaktor nach Belieben – hier $a_1 = a_2 = 1$.

Die diagonalisierende Ähnlichkeitstransformation S enthält die Eigenvektoren als Spalten; ihre Inverse folgt über die Invertierungsformel für 2×2-Matrizen, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$\text{Ähn-Tr.:} \qquad S = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \quad S^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$$\text{Check:} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} \stackrel{\checkmark}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$