WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 07.11.2022
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Musterlösung 5

1. **Ableitung**

Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$

(b) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

(c) $f(x) = e^x(2x-3)$

(d) $f(x) = x\sin\left[\pi\left(x+\frac{1}{6}\right)\right]$

(e) $f(x) = \sin^2(\pi x)$

(f) $f(x) = \tan(x)$

(g) $f(x) = x\ln x$

(h) $f(x) = x\ln(9x^2)$

(i) $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

(j) $f(x) = \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Lösung:

(a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x^3}}$

(c) $f'(x) = e^x(2x-1)$

(d) $f'(x) = \sin\left[\pi\left(x+\frac{1}{6}\right)\right] + \pi x\cos\left[\pi\left(x+\frac{1}{6}\right)\right]$

(e) $f'(x) = 2\pi\sin(\pi x)\cos(\pi x)$

(f) $f'(x) = \dfrac{\cos x\cos x + \sin x \sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

(g) $f'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

(h) $f'(x) = \ln(9x^2) + x\dfrac{1}{9x^2}18x = \ln(9x^2) + 2$

(i) $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x)$

(j) $f'(x) = \dfrac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

2. **Ableitung als Grenzwert**

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung als

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

folgende Gleichungen durch das explizite Bilden des Grenzwerts $\Delta x \to 0$.

(a)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\,g(x)\right) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,g(x) + f(x)\,\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,g(x) - f(x)\,\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}{g(x)^2}.$$

Lösung:
(a) Die Definition der Ableitung von $h(x)$ ist

$$h'(x) = \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}.$$

Wir wenden das nun auf $h(x) = f(x)\,g(x)$ an. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\,g(x)\right) &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x+\Delta x) + f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x)\,g(x+\Delta x) - f(x)\,g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\, g(x+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} f(x)\, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\, g(x) + f(x)\, \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}
$$

In der letzten Zeile haben wir $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$, while $\lim_{\Delta x\to 0} g(x+\Delta x) = g(x)$ genutzt.

(b) Wir betrachten nun die Ableitung von $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\Delta x\, g(x)}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)} + \frac{f(x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{\Delta x\, g(x)}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)} + \frac{f(x)\,g(x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)\, g(x)} - \frac{f(x)\,g(x+\Delta x)}{\Delta x\, g(x)\, g(x+\Delta x)}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)\, g(x)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)\, g(x)} + \frac{f(x)\,\left(g(x) - g(x+\Delta x)\right)}{\Delta x\, g(x+\Delta x)\, g(x)}\right) \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\, \frac{g(x)}{g(x+\Delta x)\, g(x)} - \frac{f(x)}{g(x+\Delta x)\, g(x)}\, \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{\Delta x}\right) \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\, g(x) - f(x)\, \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}}{g(x)^2}.
\end{aligned}
$$

3. **Totales Differential**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{\cos(2\,x)\,y}{z^2}.$$

Bestimmen Sie das totale Differential

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des totalen Differentials an der Stelle $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ eine Näherung für die Änderung des Funktionswertes beim Übergang von der Stelle $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ zur Stelle $x = 0.9$, $y = 2.1$, $z = -2.1$. Wie groß ist die exakte Änderung?

Lösung:
Als erstes berechnen wir das totale Differential, wofür wir die partiellen Ableitungen nach x, y und z benötigen. Wir erhalten mit der Kettenregel und Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= -2\,\frac{\sin(2\,x)\,y}{z^2}, \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{\cos(2\,x)}{z^2}, \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= -2\,\frac{\cos(2\,x)\,y}{z^3}.
\end{aligned}
$$

Das totale Differential ist also

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = -2\,\frac{\sin(2\,x)\,y}{z^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\cos(2\,x)}{z^2}\,\mathrm{d}y - 2\,\frac{\cos(2\,x)\,y}{z^3}\,\mathrm{d}z\,.$$

Eine Näherung für die Änderung des Funktionswerts $\Delta f(x,y,z)$ der Funktion f, die von einer Änderung der Variablenwerte um Δx, Δy und Δz herrührt ist

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\Delta z\,.$$

Für den Punkt $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ bedeutet dies

$$\mathrm{d}f(1,2,-2) = -\sin(2)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\cos(2)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\cos(2)\,\mathrm{d}z\,.$$

Wir wollen nun die Änderung des Funktionswerts abschätzen, wenn wir die Argumente der Funktion von $x = 1$, $y = 2$, $z = -2$ zu $x = 0.9$, $y = 2.1$, $z = -2.1$ ändern. Dies bedeutet, dass $\Delta x = 0.9 - 1 = -0.1$, $\Delta y = 2.1 - 2 = 0.1$ und $\Delta z = (-2.1) - (-2) = -0.1$ ist. Somit erhalten wir

$$\Delta f = -\sin(2)\,(-0.1) + \frac{1}{4}\cos(2)\,(0.1) + \frac{1}{2}\cos(2)\,(-0.1) = 0.1\,\sin(2) - \frac{0.1}{4}\cos(2) \approx 0.1013.$$

Zum Vergleich können wir auch mit der exakten Funktion die genaue Änderung des Funktionswerts bestimmen:

$$f(0.9, 2.1, -2.1) - f(1,2,-2) \approx 0.0999.$$

Das ist fast das gleiche Ergebnis, was daran liegt, dass wir die Änderung des Funktionswerts implizit mit einer Taylor-Entwicklung bis erster Ordnung bestimmt haben (das haben wir nur in der Sprache von totalen Differentialen getan, was aber das gleiche ist). Für "nette" (also z. B. glatte, stetige) Funktionen funktioniert das gut.