Musterlösung 6

1. Taylor-Entwicklungen

Taylor-entwickeln Sie folgende Funktionen. Dabei können Sie wählen, ob Sie die entsprechenden Ableitungen berechnen um die Koeffizienten der Taylorreihe zu bestimmen, oder ob Sie die bekannten Entwicklungen von $\sin(x)$, $\frac{1}{1-x}$ und $\ln(1+x)$ einsetzen.

(a) $f(x) = \frac{1}{1-\sin(x)}$ um $x = 0$, bis einschließlich vierter Ordnung.

(b) $g(x) = \sin(\ln(x))$ um $x = 1$, bis einschließlich zweiter Ordnung.

Lösung:

(a) Lösungsweg 1: Wir verwenden die bekannten Reihenentwicklungen der geometrischen Reihe, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (für $|x| < 1$), und des Sinus, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^5)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1-\sin x} = \frac{1}{1-[x+\frac{1}{6}x^3+\mathcal{O}(x^5)]} \\
&= 1 + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right] + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right]^2 + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right]^3 + \left[x - \tfrac{1}{6}x^3\right]^4 + \mathcal{O}(x^5) \\
&= 1 + x - \tfrac{1}{6}x^3 + x^2 - \tfrac{1}{3}x^4 + x^3 + x^4 + \mathcal{O}(x^5) \\
&= \boxed{1 + x + x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^5)}.
\end{aligned}
$$

Lösungsweg 2: Bestimmung der Taylor-Koeffizienten durch iteratives Ableiten:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \tfrac{1}{1-\sin x}, & &\Rightarrow & f(0) &= \boxed{1}. \\
f^{(1)}(x) &= \tfrac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2} & &\Rightarrow & f^{(1)}(0) &= \boxed{1}. \\
f^{(2)}(x) &= \tfrac{2\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^3} - \tfrac{\sin(x)}{(1-\sin(x))^2} & &\Rightarrow & f^{(2)}(0) &= \boxed{2}. \\
f^{(3)}(x) &= \tfrac{6\cos^3(x)}{(1-\sin(x))^4} - \tfrac{6\sin(x)\cos(x)}{(1-\sin(x))^3} - \tfrac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2} & &\Rightarrow & f^{(3)}(0) &= \boxed{5}. \\
f^{(4)}(x) &= \tfrac{24\cos^4(x)}{(1-\sin(x))^5} - \tfrac{36\sin(x)\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^4} + \tfrac{6\sin^2(x)}{(1-\sin(x))^3}\,. \\
&\quad - \tfrac{8\cos^2(x)}{(1-\sin(x))^3} + \tfrac{\sin(x)}{(1-\sin(x))^2} & &\Rightarrow & f^{(4)}(0) &= \boxed{16}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad f(x) &= f(0) + f^{(1)}(0)x + \tfrac{1}{2!}f^{(2)}(0)x^2 + \tfrac{1}{3!}f^{(3)}(0)x^3 + \tfrac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right) \\
&= \boxed{1 + x + x^2 + \tfrac{5}{6}x^3 + \tfrac{2}{3}x^4 + \mathcal{O}(x^5)}.
\end{aligned}
$$

Anmerkung: wie dieses Beispiel zeigt, ist das iterative Ableiten von Produkten oder Quotienten mühselig, weil laut Produktregel bei jedem Schritt mehr Terme generiert werden. Falls die Reihenentwicklungen der Faktoren bekannt sind, ist es einfacher, diese zu verwenden, wie in Lösungsweg 1.

(b) Lösungsweg 1: Wir substitutieren $x = 1 + y$ und verwenden die bekannten Reihenentwicklungen des Logarithmus, $\ln(1+y) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-y)^{k+1}}{k+1}$, und des Sinus [siehe (a)]:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sin(\ln(x)) = \sin(\ln(1+y)) = \sin\left(-\left(-y + \tfrac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3)\right)\right) \\
&= y - \tfrac{1}{2}y^2 + \mathcal{O}(y^3) \overset{y=x-1}{=} \boxed{(x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right)}.
\end{aligned}
$$

Lösungsweg 2: Bestimmung der Taylor-Koeffizienten durch iteratives Ableiten:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \sin(\ln(x)), && \Rightarrow \quad g(1) = \sin(\ln(1)) = \boxed{0}\,. \\
g^{(1)}(x) &= \cos(\ln(x))\frac{1}{x}, && \Rightarrow \quad g^{(1)}(1) = \cos(0) = \boxed{1}\,. \\
g^{(2)}(x) &= -\sin(\ln(x))\frac{1}{x^2} - \cos(\ln(x))\frac{1}{x^2}, && \Rightarrow \quad g^{(2)}(1) = \boxed{-1}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad g(x) &= g(1) + g^{(1)}(1)(x-1) + \tfrac{1}{2!}g^{(2)}(1)(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right) \\
&= \boxed{(x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \mathcal{O}\left((x-1)^3\right)}\,.
\end{aligned}
$$

2. **Exponential einer Matrix**

Gegeben sei die 2×2 symmetrische Matrix

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}
$$

(a) Berechnen Sie e^A mittels Taylor-Entwicklung. *Hinweis*: Da $A^2 \propto \mathbb{1}$, gilt $A^{2m} \propto \mathbb{1}$, $A^{2m+1} \propto A$, und die Taylor-Reihe e^A hat die Form $f_0\mathbb{1} + f_1 A$.

(b) Sei U die orthogonale Matrix die A diagonalisiert, mit Diagonalmatrix

$$
\Lambda = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.
$$

Zeigen Sie, dass dann gilt

$$
e^A = Ue^{\Lambda}U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} U^{-1}.
$$

Berechnen Sie e^A nun mittels Diagonalisierung.

Lösung:

(a) Zu berechnen: e^A, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix A hat folgende Eigenschaften:

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha^2\mathbb{1}, \qquad A^{2m} = (A^2)^m = \alpha^{2m}\mathbb{1}, \qquad A^{2m+1} = AA^{2m} = \alpha^{2m}A.
$$

Somit folgt:

$$
\begin{aligned}
e^A &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}A^l = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}\underbrace{A^{2m}}_{\alpha^{2m}\mathbb{1}} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}\underbrace{A^{2m+1}}_{\alpha^{2m}A} \\
&= \mathbb{1}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m)!}\alpha^{2m} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)!}\alpha^{2m+1} \\
&= \mathbb{1}\cdot\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \\
&= \boxed{\begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}}\,.
\end{aligned}
$$

(b) Wenn A bereits diagonalisiert ist, mit $A = U\Lambda U^{-1}$, erhalten wir

$$
e^A = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}A^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(U\Lambda U^{-1})^l = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}U\Lambda^l U^{-1} = U\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\Lambda^l\Big)U^{-1} = Ue^{\Lambda}U^{-1}.
$$

Im obigen Beweis haben wir

$$
(U\Lambda U^{-1})^l = (U\Lambda \underbrace{U^{-1})(U}_{=\mathbb{1}}\Lambda\underbrace{U^{-1})(U}_{=\mathbb{1}}\Lambda U^{-1})\cdots(U\Lambda U^{-1}) = U\Lambda^l U^{-1}
$$

verwendet.

Das Exponential der Diagonalmatrix, e^Λ, ist ebenfalls eine Diagonalmatrix

$$[e^\Lambda]_{ij} = \Big[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\Lambda^l\Big]_{ij} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}[\Lambda^l]_{ij} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\lambda_i^l \delta_{ij} = \delta_{ij}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\lambda_i^l = \delta_{ij} e^{\lambda_i}\,.$$

Deshalb erhalten wir $e^\Lambda = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2})$ und

$$e^A = U e^\Lambda U^{-1} = U \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} U^{-1}\,.$$

Wir betrachten nun $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ und diagonalisieren A:

Char. Polynom: $0 \stackrel{!}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = \lambda^2 - \alpha^2 \;\Rightarrow\;$ Eigenwerte: $\lambda_\pm = \pm\alpha\,.$

Normierte Eigenvektoren: $\vec{0} \stackrel{!}{=} (A - \lambda_\pm \mathbb{1})\vec{v}_\pm \;\Rightarrow\; \vec{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}\,.$

Diagonalsierende Transf.: $U = (\vec{v}_+, \vec{v}_-) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad U^{-1} = U^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

$e^A = U e^\Lambda U^{-1}$:

$$\begin{aligned} e^A &= U \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha \\ e^{-\alpha} & -e^{-\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^\alpha + e^{-\alpha} & e^\alpha - e^{-\alpha} \\ e^\alpha - e^{-\alpha} & e^\alpha + e^{-\alpha} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \cosh(\alpha) & \sinh(\alpha) \\ \sinh(\alpha) & \cosh(\alpha) \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

Dies stimmt mit dem Resultat aus (a) überein.

3. **Extremwerte einer Funktion mit zwei Variablen**

Gegeben sei die Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}. Bestimmen Sie das totale Differential $\mathrm{d}f$.

(b) Finden Sie die Extremwerte der Funktion.

Lösung:

(a) Für die Funktion $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ erhalten wir

$$f_x = 3x^2 - 3\,; \quad f_y = 3y^2 - 12\,; \quad f_{xx} = 6x\,; \quad f_{yy} = 6y\,; \quad f_{xy} = f_{yx} = 0$$

und

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y = 3(x^2 - 1)\,\mathrm{d}x + 3(y^2 - 4)\,\mathrm{d}y\,.$$

(b) Die Extremwerte werden durch die Ableitungen erhalten

$$\begin{aligned} f_x &= 3(x^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow\; x_0 = \pm 1\,, \\ f_y &= 3(y^2 - 4) = 0 \;\Rightarrow\; y_0 = \pm 2\,. \end{aligned}$$

Die ersten partiellen Ableitungen verschwinden in den Punkten:

$$P(1, 2),\; Q(-1, 2),\; R(1, -2),\; S(-1, -2)\,.$$

Um Aussagen über den Charakter der Punkte machen zu können, müssen wir die Eigenwerte der folgenden Hesse-Matrix betrachten:

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von H_f sind f_{xx} und f_{yy}, weil $f_{xy} = f_{yx} = 0$ ist.

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(1,2) = 6, \quad f_{yy}(1,2) = 12, \qquad &\Rightarrow \qquad P(1,2) \text{ ist ein lokales Minimum.} \\
f_{xx}(-1,2) = -6, \quad f_{yy}(-1,2) = 12, \qquad &\Rightarrow \qquad Q(-1,2) \text{ ist ein Sattelpunkt.} \\
f_{xx}(1,-2) = 6, \quad f_{yy}(1,-2) = -12, \qquad &\Rightarrow \qquad R(1,-2) \text{ ist ein Sattelpunkt.} \\
f_{xx}(-1,-2) = -6, \quad f_{yy}(-1,-2) = -12, \qquad &\Rightarrow \qquad S(-1,-2) \text{ ist ein lokales Maximum.}
\end{aligned}
$$