Musterlösung 7

1. Integration mittels Substitution

Integrale der Form $I(z) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x\; y'(x) f(y(x))$ lassen sich als $I(z) = \int_{y(z_0)}^{y(z)} \mathrm{d}y f(y)$ schreiben, mittels der Substitution $y = y(x)$, $\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x$. Beim Berechnen solcher Integrale empfiehlt es sich, $y(x)$ und $\mathrm{d}y$ explizit hinzuschreiben, um den Vorfaktor von $f(y)$ richtig zu identifizieren. Kontrollieren Sie stets, dass die Ableitung $I'(z) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ ihres Ergebnisses den Integranden reproduziert. Sie werden feststellen, dass sich der Faktor $y'(z)$ über die Kettenregel zur Ableitung zusammengesetzter Funktionen ergibt.

Berechnen Sie folgende Integrale durch Substitution. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x\cos(x^2+\pi)$ $\quad \left[\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, -\tfrac{1}{2}\right]$ (b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \sin^3 x \cos x$ $\quad \left[\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{1}{16}\right]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; \frac{\sqrt{1+\ln(x+1)}}{x+1}$ $\quad \left[e^3-1, \tfrac{14}{3}\right]$ (d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x^3 e^{-x^4}$ $\quad \left[\sqrt[4]{\ln 2}, \tfrac{1}{8}\right]$

Lösung:

(a)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x\cos(x^2+\pi) \qquad \left[y(x) = x^2,\; \mathrm{d}y = 2x\;\mathrm{d}x\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\;\cos(y+\pi) = \tfrac{1}{2}\sin(y+\pi)\Big|_0^{z^2} = \boxed{\tfrac{1}{2}\sin(z^2+\pi)}$$
$$I'(z) = \tfrac{1}{2}\cos(z^2+\pi)\;\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2 \overset{\checkmark}{=} \cos(z^2+\pi)\;z \qquad I\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) \overset{\checkmark}{=} -\tfrac{1}{2}$$

(b)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\;\sin^3 x\cos x \qquad \left[y(x) = \sin x,\; \mathrm{d}y = \cos x\;\mathrm{d}x\right]$$
$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\; y^3 = \tfrac{1}{4}y^4\Big|_0^{\sin z} = \boxed{\tfrac{1}{4}\sin^4 z}$$
$$I'(z) = \sin^3 z\;\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z \overset{\checkmark}{=} \sin^3 z\cos z \qquad I\left(\tfrac{\pi}{4}\right) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{16}$$

(c)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\;\sqrt{1+\ln(x+1)}\;\tfrac{1}{x+1} \qquad \left[y(x) = \ln(x+1),\; \mathrm{d}y = \tfrac{1}{1+x}\;\mathrm{d}x\right]$$
$$= \int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\;\sqrt{1+y} = \tfrac{2}{3}(1+y)^{3/2}\Big|_0^{\ln(z+1)} = \boxed{\tfrac{2}{3}\left[\left(1+\ln(z+1)\right)^{3/2}-1\right]}$$
$$I'(z) = \left(1+\ln(z+1)\right)^{1/2}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(z+1) \overset{\checkmark}{=} \sqrt{1+\ln(z+1)}\;\tfrac{1}{z+1} \qquad I(e^3-1) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{14}{3}$$

(d)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x\; x^3 e^{-x^4} \qquad \left[y(x) = x^4,\; \mathrm{d}y = 4x^3\;\mathrm{d}x\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}\int_{y(0)}^{y(z)} \mathrm{d}y\; e^{-y} = -\tfrac{1}{4}e^{-y}\Big|_0^{z^4} = \boxed{\tfrac{1}{4}\left[1-e^{-z^4}\right]}$$
$$I'(z) = \tfrac{1}{4}e^{-z^4}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^4 \overset{\checkmark}{=} e^{-z^4}z^3 \qquad I\left(\sqrt[4]{\ln 2}\right) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{8}$$

2. Partielle Integration

Integrale der Form $I(z) = \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x\; u(x)v'(x)$ lassen sich mittels partieller Integration als $I(z) = [u(x)v(x)]_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}x\; u'(x)v(x)$ schreiben. Diese Umformung ist nützlich, falls $u'v$ integrierbar ist – entweder direkt, oder nach weiteren partiellen Integrationen [siehe (b)], oder durch andere Manipulationen [siehe (e,f)]. Beim Durchführen einer solchen Rechnung ist es ratsam, die Faktoren u, v', v und u' klar zu kennzeichnen. Kontrollieren Sie stets, dass die Ableitung $I'(z) = \mathrm{d}I/\mathrm{d}z$ Ihres Ergebnisses den Integranden reproduziert. Falls eine einmalige partielle Integration ausreicht, um $I(z)$ zu berechnen, werden Sie für dessen Ableitung das Kürzungsmuster $I' = u'v + uv' - u'v = uv'$ wiedererkennen [siehe (a,c,d)]; ansonsten ist das Kürzungsmuster komplizierter [siehe (b,e,f)].

Berechnen Sie folgende Integrale mittels partieller Integration. [Ergebniskontrolle: $[a, b]$ steht für $I(a) = b$.]

(a) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; x \; e^{2x}$ $\quad [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$

(b) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; x^2 \; e^{2x}$ $\quad [\frac{1}{2}, \frac{e}{8} - \frac{1}{4}]$

(c) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \ln x$ $\quad [1, -1]$

(d) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad [1, -4]$

(e) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \sin^2 x$ $\quad [\pi, \frac{\pi}{2}]$

(f) $I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \sin^4 x$ $\quad [\pi, \frac{3\pi}{8}]$

Lösung:

(a)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u}{x} \; \overset{v'}{e^{2x}} = \Big[\overset{u}{x} \; \overset{v}{\tfrac{1}{2}e^{2x}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u'}{1} \cdot \overset{v}{\tfrac{1}{2}e^{2x}} = \boxed{\tfrac{1}{2}ze^{2z} - \tfrac{1}{4}\left[e^{2z} - 1\right]}$$

$$I'(z) = \left[\tfrac{1}{2}(1+2z) - \tfrac{1}{4}2\right] e^{2z} \overset{\checkmark}{=} ze^{2z} \qquad I(\tfrac{1}{2}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{1}{4}$$

Beachten Sie das Kürzungsmuster: $I' = u'v + uv' - u'v = uv'$. [Analog bei (c,d).]

(b)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u}{x^2} \; \overset{v'}{e^{2x}} = \Big[\overset{u}{x^2} \; \overset{v}{\tfrac{1}{2}e^{2x}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u'}{2x} \; \overset{v}{\tfrac{1}{2}e^{2x}}$$

Das Integral rechts lässt sich durch nochmalige partielle Integration lösen, siehe (a):

$$I(z) \overset{\text{(a)}}{=} \boxed{\tfrac{1}{2}z^2e^{2z} - \tfrac{1}{2}ze^{2z} + \tfrac{1}{4}\left[e^{2z} - 1\right]}$$

$$I'(z) = \left[\tfrac{1}{2}(2z+2z^2) - \tfrac{1}{2}(1+2z) + \tfrac{1}{4}2\right] e^{2z} \overset{\checkmark}{=} z^2e^{2z} \qquad I(\tfrac{1}{2}) \overset{\checkmark}{=} \tfrac{e}{8} - \tfrac{1}{4}$$

Da zweifach partiell integriert wurde, ist das Kürzungsmuster für I' komplizierter als in (a).

(c)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u}{(\ln x)} \cdot \overset{v'}{1} = \Big[\overset{u}{(\ln x)} \; \overset{v}{x}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u'}{\tfrac{1}{x}} \; \overset{v}{x} = \boxed{(\ln z)z - z}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{z}z + \ln z - 1 \overset{\checkmark}{=} \ln z \qquad I(1) \overset{\checkmark}{=} -1$$

(d)
$$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u}{(\ln x)} \cdot \overset{v'}{\tfrac{1}{\sqrt{x}}} = \Big[\overset{u}{(\ln x)} \; \overset{v}{2\sqrt{x}}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x \; \overset{u'}{\tfrac{1}{x}} \; \overset{v}{2\sqrt{x}} = \boxed{(\ln z)2\sqrt{z} - 4\sqrt{z}}$$

Zur Auswertung von $[\ln(x)\sqrt{x}]_{x=0}$ wurde der Satz von l'Hopital benutzt:

$$\Big[(\ln x)\sqrt{x}\Big]_{x=0} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{-1/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0}\left[-2x^{1/2}\right] = \boxed{0}.$$

Folglich divergiert $\ln(x)$ so langsam für $x \to 0$, dass $\sqrt{x}$ diese Divergenz unterdrückt.

$$I'(z) = 2\left[\tfrac{1}{z}\sqrt{z} + (\ln z)\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{z}}\right] - 4\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{\sqrt{z}} \stackrel{\checkmark}{=} (\ln z)\tfrac{1}{\sqrt{z}} \qquad I(1) \stackrel{\checkmark}{=} -4$$

(e) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \, \overset{u}{\sin x} \, \overset{v'}{\sin x} = \Big[\overset{u}{\sin x}\,\overset{v}{(-\cos x)}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x \, \underbrace{\overset{u'}{\cos x}\,\overset{v}{(-\cos x)}}_{\sin^2 x - 1}$$

Wir drücken das Integrals rechts wieder durch $I(z)$ aus,

$$I(z) = -\sin z \cos z - I(z) + \int_0^z \mathrm{d}x\; 1\,, \qquad \text{und lösen nach } I(z) \text{ auf:}$$

$$I(z) = \boxed{\tfrac{1}{2}(-\sin z \cos z + z)}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{2}(-\cos^2 z + \sin^2 z + 1) \stackrel{\checkmark}{=} \sin^2 z \qquad I(\pi) \stackrel{\checkmark}{=} \tfrac{\pi}{2}$$

(f) $$I(z) = \int_0^z \mathrm{d}x \, \overset{u}{\sin^3 x} \, \overset{v'}{\sin x} = \Big[\overset{u}{\sin^3 x}\,\overset{v}{(-\cos x)}\Big]_0^z - \int_0^z \mathrm{d}x \,\big(\overset{u'}{3\sin^2 x \,\cos x}\big)\,\underbrace{\overset{v}{(-\cos x)}}_{\sin^2 x - 1}$$

Wir drücken das Integrals rechts wieder durch $I(z)$ aus,

$$I(z) = -\sin^3 z \cos z - 3\Big[I(z) - \int_0^z \mathrm{d}x \sin^2 x\Big]\,, \qquad \text{lösen nach } I(z) \text{ auf, und nutzen (e):}$$

$$I(z) \stackrel{\text{(e)}}{=} \boxed{\tfrac{1}{4}\left[-\sin^3 z\cos z + \tfrac{3}{2}(-\sin z \cos z + z)\right]}$$

$$I'(z) = \tfrac{1}{4}\Big[-3\sin^2 z \underbrace{\cos^2 z}_{1-\sin^2 z} + \sin^4 z + \tfrac{3}{2}(-\cos^2 z + \sin^2 z + 1)\Big] \stackrel{\checkmark}{=} \sin^4 z \qquad I(\pi) \stackrel{\checkmark}{=} \tfrac{3\pi}{8}$$

3. **Integrale der Form $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$**

Berechnen Sie das Integral $I_n(a) = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, x^n e^{-ax}$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$) durch mehrfache partielle Integration:

(a) Berechnen Sie zuerst I_0, I_1 und I_2.

(b) Zeigen Sie dann mittels partieller Integration, dass $I_n(a) = \frac{n}{a} I_{n-1}(a)$ für alle $n \geq 1$ gilt. Nutzen Sie diese Beziehung iterativ, um $I_n(a)$ als Funktion von a und n zu bestimmen.

Lösung:
Im Folgenden steht I_n für $I_n(a)$, d.h. die a-Abhängigkeit des Integrals wird nicht explizit notiert. Wiederholtes partielles Integrieren liefert:

$$I_0 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-ax} = -\frac{e^{-ax}}{a}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{a}$$

$$I_1 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\; \overset{u}{x}\, \overset{v'}{e^{-ax}} \stackrel{uv - \int u'v}{=} \left[x\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}x\, 1 \left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right) = 0 + \frac{1}{a} I_0 = \frac{1}{a^2}$$

$$I_2 = \int_0^\infty \mathrm{d}x\; \overset{u}{x^2} \overset{v'}{e^{-ax}} \stackrel{uv - \int u'v}{=} \left[x^2\left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}x\, 2x \left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right) = 0 + \frac{2}{a} I_1 = \frac{2}{a^3}$$

$$\cdots$$

$$I_n = \int_0^\infty \mathrm{d}x\; \overset{u}{x^n} \overset{v'}{e^{-ax}} \stackrel{uv - \int u'v}{=} x^n \left[-\frac{1}{a} e^{-ax}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \mathrm{d}x\, n x^{n-1} \left(-\frac{1}{a} e^{-ax}\right) = \frac{n}{a} I_{n-1}$$

Daraus ergibt sich ein Muster:

$$I_n = \frac{n}{a} I_{n-1} = \frac{n}{a}\frac{n-1}{a} I_{n-2} = \frac{n}{a}\frac{n-1}{a}\frac{n-2}{a} I_{n-3} = \frac{n}{a}\frac{n-1}{a}\frac{n-2}{a} \cdots \frac{2}{a}\frac{1}{a}\frac{1}{a} = \boxed{\frac{n!}{a^{n+1}}}.$$