Musterlösung 8

1. Zweidimensionale Integration

Berechnen Sie das Flächenintegral $I = \int_G \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\, f(x,y)$ der Funktion $f(x,y) = xy$ über dem Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le y \le 1;\ 1 \le x \le 2-y\}$.

Lösung:

$$I = \int_G \mathrm{d}x\mathrm{d}y\, f(x,y) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_1^{2-y} \mathrm{d}x\; xy = \int_0^1 \mathrm{d}y\; y\Big[\tfrac{1}{2}x^2\Big]_1^{2-y} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y\; y\Big[(2-y)^2 - 1\Big]$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}y\; \left(y^3 - 4y^2 + 3y\right) = \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{4}{3}y^3 + \tfrac{3}{2}y^2\right]_0^1 = \boxed{\tfrac{5}{24}}.$$

2. Massendichte eines Würfels

Wir betrachten einen Würfel der Kantenlänge $2a$. Der Würfel habe in seinem Inneren eine Massendichte $\rho(\vec{r}) = \rho_0\,\vec{r}^2$. Der Würfel liege so, dass eine Ecke bei $\vec{r} = (-a,-a,-a)^T$ liegt und eine andere Ecke bei $\vec{r} = (a,a,a)^T$.

Hinweis: Wenn der Würfel parallel zu den Koordinatenachsen liegt, gilt

$$\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\,,$$

wobei das Innere des Würfels x-Koordinaten zwischen x_1 und x_2, y-Koordinaten zwischen y_1 und y_2 und z-Koordinaten zwischen z_1 und z_2 hat. Weiterhin löst man ein Mehrfachintegral der Form

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, f(x)\,g(y)\,h(z)$$

über das Produkt der Einzelintegrale,

$$\left(\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x)\right)\cdot\left(\int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y\, g(y)\right)\cdot\left(\int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\, h(z)\right).$$

(a) Berechnen Sie die Gesamtmasse M des Würfels durch Integration der Massendichte,

$$M = \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V\,\rho(\vec{r})\,.$$

(b) Bestimmen Sie nun die Koordinate des Schwerpunkts $\vec{R}$. Dieser ist definiert als

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V\;\rho(\vec{r})\,\vec{r}}{\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V\;\rho(\vec{r})}\,.$$

(c) Berechnen Sie nun noch das Trägheitsmoment des Würfels für eine Drehung um die z-Achse, das durch

$$I_z = \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V\,\rho(\vec{r})\;\left((x-R_x)^2 + (y-R_y)^2\right)$$

gegeben ist.

Lösung:

(a) Das Innere des Würfels entspricht den Koordinatenbereichen $x \in [-a, a]$, $y \in [-a, a]$ und $z \in [-a, a]$. Das Integral für die Gesamtmasse ist also

$$M = \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V \rho(\vec{r}) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, \rho_0 \, (x^2 + y^2 + z^2) \, .$$

Wir können jetzt jeden der drei Terme separat berechnen:

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, \rho_0 \, x^2 = \rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, x^2 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z = \rho_0 \left[\frac{1}{3}\, x^3\right]_{-a}^{a} \left[\frac{1}{3}\, y\right]_{-a}^{a} \left[\frac{1}{3}\, z\right]_{-a}^{a} \\ &= \rho_0 \left(\frac{2}{3}\, a^3\right) (2\, a) \; (2\, a) = \frac{8}{3} \rho_0 a^5 . \end{aligned}$$

Die Beiträge für M_y und M_z berechnen sich genauso wie M_x, und ergeben das gleiche Ergebnis (das sieht man z. B. daran, dass man bei M_y einfach x in y und y in x umbenennen kann). Wir erhalten somit

$$M = \boxed{8\rho_0 a^5} .$$

(b) Der Masseschwerpunkt ist gegeben durch

$$\vec{R} = \frac{\int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V \, (\rho_0 \vec{r}^2) \vec{r}}{8\rho_0 a^5} = \frac{1}{8a^5} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, (x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Da jedes der Integrale ungerade ist, erhalten wir für den Masseschwerpunkt schon ohne Rechnung $\vec{R} = 0$. Exemplarisch zeigen wir hier noch $R_x = 0$, R_y und R_z berechnen sich analog:

$$R_x = \frac{1}{8a^5} \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V \, (x^2 + y^2 + z^2) \, x = \frac{1}{8\, a^5} \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, (x^3 + y^2\, x + z^2\, x) \, .$$

Da $\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, x^3 = [x^4/4]_{-a}^{a} = 0$ und $\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, x = [x^2/2]_{-a}^{a} = 0$ ist, folgt $R_x = 0$. Wir erhalten somit

$$\vec{R} = \boxed{0} .$$

Das ist der Mittelpunkt des Würfels, und somit auch anschaulich sein Masseschwerpunkt.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\text{Würfel}} \mathrm{d}V \, \rho_0 (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, \rho_0 (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2) \\ &= \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, \rho_0 \left[x^4 + x^2 \, (y^2 + z^2) + y^4 + y^2 \, (x^2 + z^2)\right] . \end{aligned}$$

Da die ersten beiden Terme des Integrals symmetrisch zu den letzten beiden Termen sind, wenn wir $x \leftrightarrow y$ vertauschen, gilt

$$I_z = 2\rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, \left[x^4 + x^2 \, (y^2 + z^2)\right] .$$

Weiterhin sind die Terme $x^2\, y^2$ und $x^2\, z^2$ symmetrisch unter der Vertauschung $y \leftrightarrow z$, und wir erhalten

$$I_z = 2\rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \, (x^4 + 2x^2 y^2) \, .$$

Diese Integrale berechnen wir nun wie folgt:

$$\begin{aligned} I_z &= 2\rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, x^4 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z + 2\rho_0 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \, x^2 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}y \, y^2 \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z \\ &= 2\rho_0 \left[\frac{1}{5} x^5\right]_{-a}^{a} [y]_{-a}^{a} \, [z]_{-a}^{a} + 2\rho_0 \left[\frac{1}{3} x^3\right]_{-a}^{a} \left[\frac{1}{3} y^3\right]_{-a}^{a} [z]_{-a}^{a} \\ &= 2\rho_0 \left(\frac{2}{5} a^5 \cdot 2\, a \cdot 2\, a\right) + 2\rho_0 \left(\frac{2}{3} a^3 \cdot 2 \frac{2}{3} a^3 \cdot 2a\right) \\ &= \rho_0 \left(\frac{16}{5} a^7 + \frac{32}{9} a^7\right) = \rho_0 \left(\frac{144}{45} a^7 + \frac{160}{45} a^7\right) = \boxed{\frac{304}{45} \rho_0 a^7} . \end{aligned}$$

3. **Koordinatentransformation**

Der Punkt P_1 hat Kugelkoordinaten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/6, 2\pi/3)$. Wie lauten seine kartesischen und Zylinderkoordinaten, (x, y, z) bzw. (ρ, φ, z)? Der Punkt P_2 hat Zylinderkoordinaten $(\rho, \varphi, z) = (4, \pi/4, 2)$. Wie lauten seine kartesischen und Kugelkoordinaten? (Winkel sind in Radiant anzugeben.)

Lösung:

$$P_1 : (r, \theta, \varphi) = (2, \pi/6, 2\pi/3), \quad (x, y, z) = \boxed{(-1/2, \sqrt{3}/2, \sqrt{3})}\,, \quad (\rho, \varphi, z) = \boxed{(1, 2\pi/3, \sqrt{3})}$$

$$x = r \sin\theta \cos\varphi = 2 \cdot 1/2 \cdot (-1/2) = -1/2, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi = 2 \cdot 1/2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/2,$$

$$z = r \cos\theta = 2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1.$$

$$P_2 : (\rho, \varphi, z) = (4, \pi/4, 2), \quad (x, y, z) = \boxed{(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 2)}\,, \quad (r, \theta, \varphi) = \boxed{(2\sqrt{5}, 1.11, \pi/4)}$$

$$x = \rho \cos\varphi = 4 \cdot \sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}, \quad y = \rho \sin\varphi = 4 \cdot 1 = \sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{8 + 8 + 4} = 2\sqrt{5}, \quad \theta = \arccos\frac{z}{r} = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} \approx 1.11 \quad \text{(entspricht } 63°\text{)}.$$