WS2022/23: Rechenmethoden für Lehramt Physik — Ausgabe: 05.12.2022
Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
Dozent: Hong-Hao Tu

Musterlösung 9

---

1. **Jacobi-Determinante**

Berechnen Sie die Jacobi-Determinanten für die Transformationen (a) von kartesischen zu Zylinderkoordinaten bzw. (b) von kartesischen zu Kugelkoordinaten.

Lösung:

(a) Zylinderkoordinaten: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$.

$$\mathrm{Det}(J) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho(\cos\varphi^2 + \sin^2\varphi) = \boxed{\rho}.$$

(b) Kugelkoordinaten: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(J) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos\theta\Big[\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\Big] + r^2\sin\theta\Big[\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi\Big] \\ &= r^2\sin\theta(\cos\theta^2 + \sin^2\theta) = \boxed{r^2\sin\theta}. \end{aligned}$$

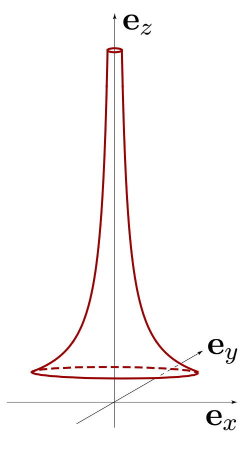
2. **Flächenintegral: hyperbolischer Rotationskörper (Gabriel's Horn)**

Der Körpers K werde durch die Rotation der Funktion $\rho(z) = 1/z$ mit $1 \le z \le a$ um die z-Achse erzeugt. Solch ein Körper ist als Gabriels Horn oder Torricellis Trompete bekannt.

(a) Berechnen Sie das Volumen, $V(a)$, des Körpers K. [Kontrollergebnis: $V(2) = \frac{\pi}{2}$.]

(b) Wie groß ist das Volumen im Limes $a \to \infty$?

Hinweis: Nutzen Sie die Zylinderkoordinaten!



Lösung:

(a) Die Oberfläche des Rotationskörpers ist in Zylinderkoordinaten definiert über $\rho(z) = \frac{1}{z}$, $z \in [1, a]$. Das Volumen ist gegeben durch

$$V(a) = \int_K \mathrm{d}V = \int_1^a \mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} \mathrm{d}\tilde{\rho}\, \tilde{\rho} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi \int_1^a \mathrm{d}z\, \frac{1}{2z^2} = \pi \left(-z^{-1}\right)\big|_1^a = \boxed{\pi\left(1 - \frac{1}{a}\right)}.$$

(b) Im Limes $a \to \infty$ bleibt das Volumen endlich:

$$V = \pi\left(1 - \frac{1}{a}\right) \to \boxed{\pi}$$

3. **Gaußsches Integral**

Bestimmen Sie

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2} \quad (\alpha \in \mathbb{R},\, \alpha > 0),$$

indem Sie zunächst das Quadrat des Integrals in Polarkoordinaten berechnen.

Lösung:
Wir betrachten das Quadrat des Integrals $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2}$,

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, e^{-\alpha y^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, e^{-\alpha(x^2+y^2)}.$$

Zur Auswertung führen wir Polarkoordinaten ρ, φ ein:

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho\, \rho\, e^{-\alpha\rho^2} \overset{r=\rho^2}{=} 2\pi\, \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\, e^{-\alpha r} = \pi \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha r}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Wir verwenden $I > 0$ (da $e^{-\alpha x^2} > 0$) und dann erhalten

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2} = \boxed{\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}}.$$

4. **Allgemeine Gauß-Integrale**

Mehrfach-Gauß-Integrale sind Integrale der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n\, e^{-\mathbf{r}^T A \mathbf{r}},$$

wobei $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ und die reelle Matrix A symmetrisch und positiv-definit ist (d.h. alle Eigenwerte von A sind > 0). Die kennzeichnende Eigenschaft dieser Klasse von Integralen ist, dass der Exponent eine ‘quadratische Form’, d.h. eine *quadratische* Funktion aller Integrationsvariablen ist. In der Regel enthält diese Funktion Mischterme, aber diese können mittels einer Basistransformation beseitigt werden: Sei O die Ähnlichkeitstransformation, die A diagonalisiert, sodass $D = O^T A O$ diagonal ist, mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da A symmetrisch ist, ist O orthogonal, mit $O^{-1} = O^T$ und $\det O = \pm 1$. Sei nun $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ definiert durch $\tilde{\mathbf{r}} = O^T \mathbf{r}$, dann gilt

$$\mathbf{r}^T A \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}^T O^T A O \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}^T D\, \tilde{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\tilde{x}_i)^2 . \tag{1}$$

Ausgedrückt durch die neuen Variablen $\tilde{\mathbf{r}}$ enthält der Exponent folglich keine Mischterme mehr, sodass das Gauß-Integral durch die Variablensubstitution $\mathbf{r} = O\tilde{\mathbf{r}}$ gelöst werden:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x_n\, e^{-\mathbf{r}^T A \mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}_1 \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}_n\, J\, e^{-\sum_{i=1}^{n} \lambda_n (\tilde{x}_i)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_1}} \cdots \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_n}}.$$

Dabei haben wir die folgende Tatsache genutzt: Da $\partial x_i/\partial \tilde{x}_j = O_{ij}$, ist die Jacobi-Determinante der Variablentransformation gleich der Determinante von O und somit gleich 1:

$$J = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \tilde{x}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \tilde{x}_n} \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} O_{11} & \dots & O_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ O_{n1} & \dots & O_{nn} \end{pmatrix}\right| = |\det O| = 1\,.$$

Benutzen Sie nun obige Strategie, um folgendes Integral zu berechnen:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, e^{-(4x^2-4xy+4y^2)}\,.$$

Führen Sie alle Schritte der obigen Argumentation explizit durch:

(a) Schreiben Sie den Exponenten in der Form $-\mathbf{r}^T A\mathbf{r}$ mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und A symmetrisch. Identifizieren und diagonalisieren Sie die Matrix A. Schreiben Sie insbesondere die Gleichung (1) für den aktuellen Fall explizit auf.

(b) Was ist der Wert des Gauß-Integrals?

Lösung:

(a) Wir schreiben den Exponenten als $\mathbf{r}^T A\mathbf{r}$, mit $\mathbf{r} = (x, y)^T$ und einer symmetrischen Matrix A, mit $A_{12} = A_{21}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^T A\mathbf{r} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_{11}\,x^2 + A_{12}\,xy + A_{21}\,yx + A_{22}\,y^2 \\ &\overset{!}{=} 4x^2 - 4xy + 4y^2\,.\end{aligned}$$

Wir identifizieren daher

$$A_{11} = A_{22} = 4\,, \quad A_{12} = A_{21} = -2\,, \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}.$$

Eigenwerte: $\quad 0 \overset{!}{=} \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (2-\lambda)(6-\lambda) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_1 = 2}, \quad \boxed{\lambda_2 = 6}.$

Normierte Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = 2: \qquad \vec{0} \overset{!}{=} (A - \lambda_1\mathbb{1})\,\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_1 \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 6: \qquad \vec{0} \overset{!}{=} (A - \lambda_2\mathbb{1})\,\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 \qquad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es existiert also eine orthogonale Transformation O, so dass $O^T A O = D$ mit $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Die Spalten dieser Transformation O entsprechen den normierten Eigenvektoren der Matrix A, also

$$O = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{x}, \tilde{y})^T = O^T\mathbf{r}$ nimmt der Exponent daher die folgende Form an

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4xy + 4y^2 &= \mathbf{r}^T A\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}^T O^T A O\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}^T D\tilde{\mathbf{r}} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \boxed{2\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2}. \end{aligned}$$

Da $O^{-1} = O^T$ ist die Inverse der Beziehung $\tilde{\mathbf{r}} = O^T\mathbf{r}$ durch $\mathbf{r} = O\tilde{\mathbf{r}}$ gegeben. Explizit:

$$x = O_{11}\tilde{x} + O_{12}\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} + \tilde{y}), \quad y = O_{21}\tilde{x} + O_{22}\tilde{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{x} - \tilde{y})\,.$$

Die Jacobi-Determinante liefert 1, da O orthogonal ist. Explizit:

$$J = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial x}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \tilde{x}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| = 1\,.$$

(b) Nun berechnen wir I, mittels dem Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, e^{-(4x^2 - 2xy + 4y^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, e^{-\mathbf{r}^T A \mathbf{r}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{y}\, J\, e^{-\tilde{\mathbf{r}}^T D \tilde{\mathbf{r}}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{y}\, e^{-(2\tilde{x}^2 + 6\tilde{y}^2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{x}\, e^{-2\tilde{x}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tilde{y}\, e^{-6\tilde{y}^2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}} = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$