Ausgabe: 10.10.2022

Übungsblatt 1

1. **Dreiecksungleichung und Schwarzsche Ungleichung**

(a) Zeigen Sie, dass die beiden Definitionen des Skalarprodukts

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x\, b_x + a_y\, b_y + a_z\, b_z$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, |\vec{b}|\, \cos(\theta)$$

äquivalent sind, wobei θ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. *Hinweis*: Wählen Sie das Koordinatensystem geschickt!

(b) Beweisen Sie den aus der ebenen Trigonometrie bekannten Kosinussatz mit Hilfe des Skalarprodukts.

(c) Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

und die Schwarzsche Ungleichung

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

gelten.

2. **Rechnen mit Vektoren**

Eine Ebene E enthält die drei Punkte $\vec{r}_1 = (0, 2, 1)^T$, $\vec{r}_2 = (-1, 0, 3)^T$ und $\vec{r}_3 = (1, 0, 1)^T$.

(a) Konstruieren Sie aus $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ sowie aus $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_3$ zwei *normierte* Vektoren, $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$, die beide in der Ebene E liegen.

(b) Bestimmen Sie einen (normierten) Vektor $\vec{n}$ orthogonal zur Ebene E. *Hinweis:* Kreuzprodukt!

(c) Bestimmen Sie, ausgehend von $\vec{b}$, einen *normierten* Vektor $\vec{c}$ orthogonal zu $\vec{n}$ und $\vec{a}$.

3. **Lineare Unabhängigkeit**

Sind die drei Vektoren $\vec{v}_1 = (0, 1, 2)^T$, $\vec{v}_2 = (1, -1, 1)^T$ und $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)^T$ linear unabhängig? Warum?

4. **Orthonormalbasis**

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{e}_1 = \frac{1}{5}(3, 4)^T$ und $\vec{e}_2 = \frac{1}{5}(4, -3)^T$ eine Orthonormalbasis in zwei Dimensionen bilden.